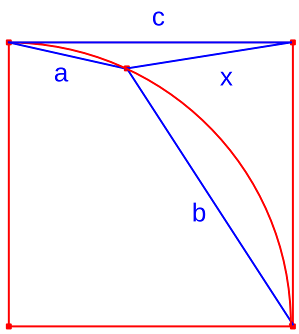
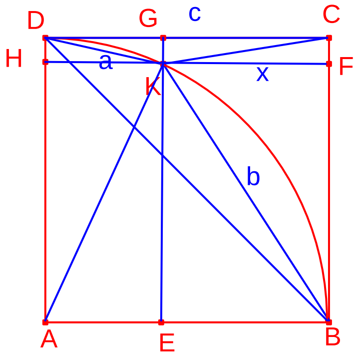
Problemes de Geometria per a l'ESO 452

4511.- La figura està formada per un quadrat de costat c,,
un quadrant i tres segments de longituds a, b, x
Calculeu la mesura $s^2 - x^2 = f(a,b)$



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{BD} = c\sqrt{2}$
Siguen $\overline{DK} = a, \overline{BK} = b, \overline{CK} = x$
Siguen F, H les projeccions de K sobre $\overline{BC}, \overline{AD}$, respectivament.
Siguen E, G les projeccions de K sobre $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siguen $\overline{HK} = m, \overline{GK} = n$

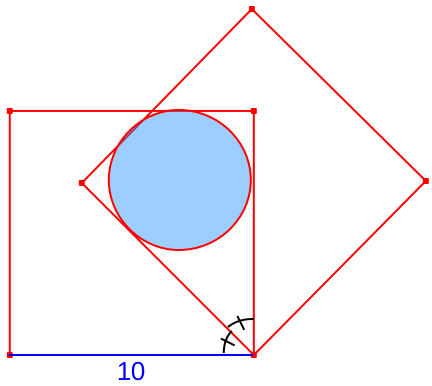
$$\angle DKB = \frac{270°}{2} = 135°$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKB}$:
$2s^2 = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{GCK}, \overset{\Delta}{KEB}$:
$x^2 - n^2 = b^2 - (c-n)^2$
$x^2 = b^2 - s^2 + 2nc$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DGK}, \overset{\Delta}{AEK}$:
$a^2 - n^2 = c^2 - (c-n)^2$
$a^2 = 2nc$ (3)
Restant les expressions (2) i (3)
$x^2 = a^2 + b^2 - c^2$ (4)
Restant les expressions (1) i (4)
$2c^2 - x^2 = c^2 + ab\sqrt{2}$ (5)
$c^2 - x^2 = ab\sqrt{2}$

4512.- La figura està formada per dos quadrats iguals de costat 10.
Calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



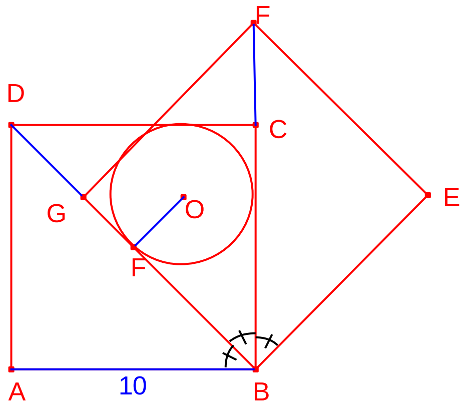
Solució:

El cercle està inscrit en el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BGF}$.
Siga $r = \overline{OT} = \overline{GT}$ radi de la circumferència.

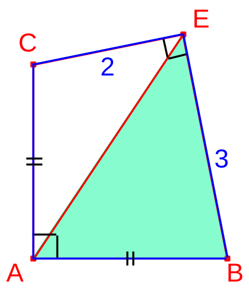
$$r = \frac{2 \cdot \overline{BG} - \overline{BF}}{2} = \frac{20 - 10\sqrt{2}}{2} = 10 - 5\sqrt{2}$$

L'àrea del cercle és:

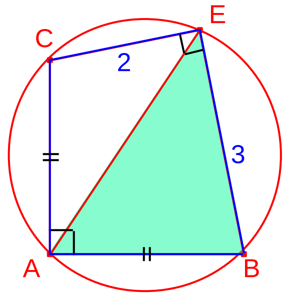
$$S_{cercle} = \pi r^2 = \pi\left(150 - 100\sqrt{2}\right)$$



4513.- Donat el quadrilàter $ABEC$ calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$



Solució:
El quadrilàter $ABEC$ és cíclic ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEC}$



$\overline{BC} = \sqrt{13}$

$\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{13} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$\angle ACB = \angle AEB = 45°$

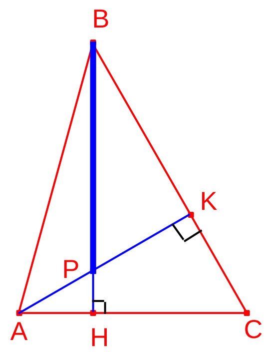
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter $ABEC$:

$\overline{AE} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26} \cdot \frac{3\sqrt{26}}{2}$

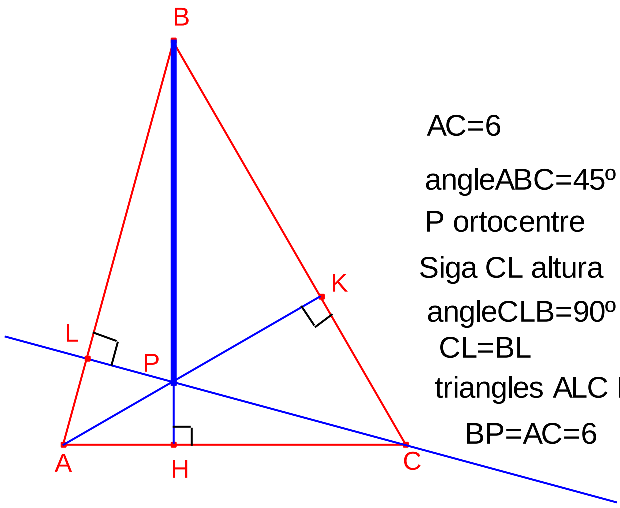
$\overline{AE} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{4}$

4514.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 45°, \overline{AC} = 6$
Siguen les altures $\overline{BH}, \overline{AH}$ que es tallent en el punt P.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BP}$



Solució:



AC=6

angleABC=45º

P ortocentre

Siga CL altura

angleCLB=90º

CL=BL

triangles ALC LPB iguals

BP=AC=6

4515.- Un dels vèrtexs d'un quadrat és $P(1,2)$ i l'altre en la recta $y = 3x + 4$
Determineu el valor mínim per a la seua àrea.

Solució:

El punt P no pertany a la recta ja que:

$2 \neq 3 \cdot 1 + 4$

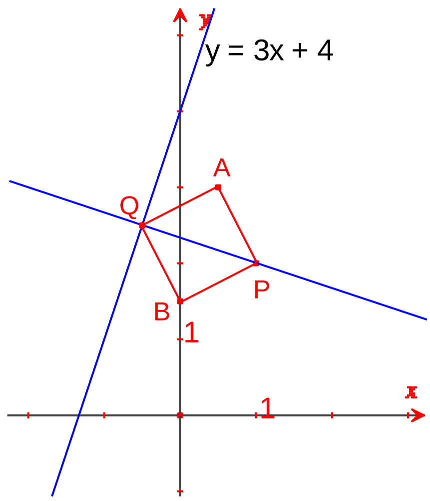
El quadrat de menor àrea té el vèrtex oposat a Q en la mínima distància del punt P a la recta $r \equiv 3x - y + 4 = 0$

Aquesta distància és la mesura de la diagonal del quadrat.

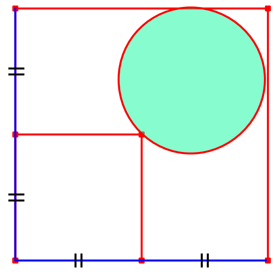
$$d(P,r) = \left|\frac{3 \cdot 1 - ! \cdot 2 + 4}{\sqrt{3^2 + 1^2}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

L'àrea del quadrat és:

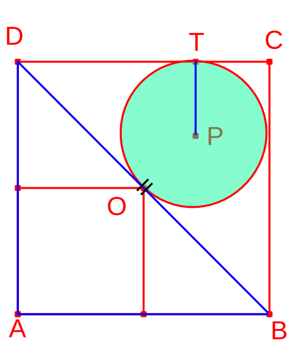
$$S_{quadrat} = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{5}{4}$$



4516.- La figura està formada per dos quadrats i un cercle ombrejat.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
La intersecció del cercle i el quadrat interior és el centre O del quadrat.
Siga $r = \overline{PT}$ radi del cercle.



El cercle està inscrit al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$r = \frac{2 \cdot \overline{CD} - \overline{BD}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

L'àrea del cercle és:

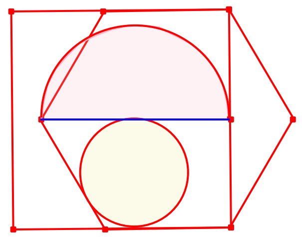
$$S_{cercle} = \pi r^2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}\pi$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{cercle}}{S_{ABCd}} = \frac{\pi r^2}{1^2} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}\pi \approx 0.2695$$

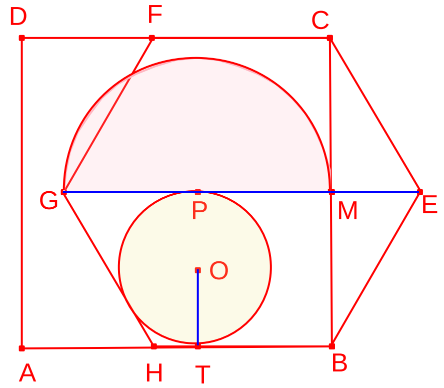
4517.- La figura està formada per un quadrat un hexàgon regular un semicercle i un cercle.
Calculeu:

a) La proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del cercle.
b) La proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $BECFGH$ de costat $\overline{CF} = c$
$\overline{BC} = 1 = c\sqrt{3}$
La proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea de l'hexàgon regular és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BECFGH}} = \frac{1}{6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Siga O el centre del cerccle de radi

$$\overline{OT} = r = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{GE} = 2c, \overline{EM} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{GM} = \frac{3}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

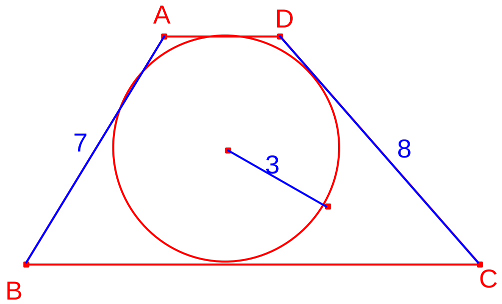
Siga P el centre del semicercle de diàmetre $2R = \overline{GM}$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

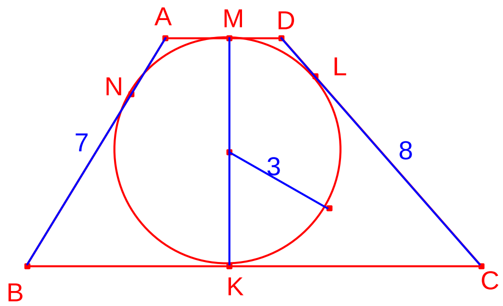
La proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle és:

$$\frac{S_{semicerccle}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{2}$$

4518.- La figura està formada pel trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{BC}, \overline{AD}$ i costats no paral·lels $\overline{AB} = 7, \overline{CD} = 8$ que conté una circumferència inscrita de radi 3.
Calculeu l'àrea del trapezi.



Solució:

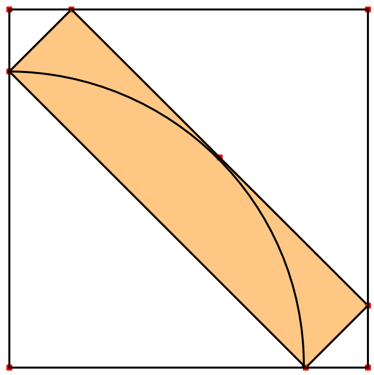


BK=BN=a
CK=CL=b
DL=DM=c
AM=AN=d

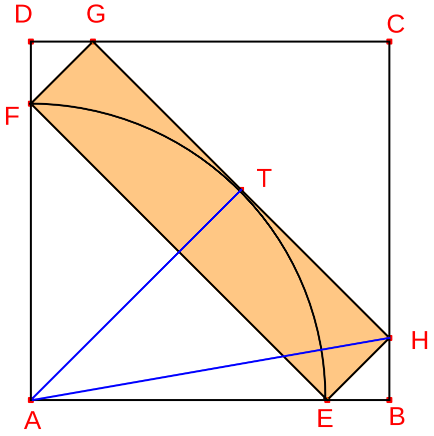
KM=2·3=6
a+d=7, b+c=8
a+b+c+d=15

[ABCD]=6(a+b+c+d)/2·=45

4519.- La figura està formada per un quadrat que conté un rectangle i un quadrant tangent a un costat del rectangle.
Calculeu la proporció entre l’àrea del rectangle i l’àrea del quadrat.



Solució:



AE=AF=AT=1

BE=DF=a

EF=sqrt(2)

Teorema Pitàgores ATH

$(1+a)^2=1/2+1$

a=(sqrt(2)-1)/2

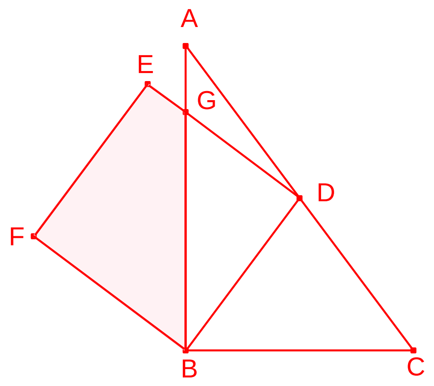
HE=(2-sqrt(2))/2

[EFGH]=FE·HE=sqrt(2)-1

[ABCD]=$(1+a)^2$=(3+2·sqrt(2))/4

[EFGH]/[ABCD]=4(5·sqrt(2)-7)

4520.- La figura està forma pel triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 8, \overline{BC} = 6, \overline{AD} = \overline{CD} = 5$, i el quadrat $BDEF$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter $GEFB$



Solució:

Aplicant el teorema invers de Pitàgores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $B = 90°$

$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 5$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{DG} = \frac{75}{4}$

L'àrea del quadrilàter $GEFB$ és:

$S_{GEFB} = S_{BDEF} - S_{BDG} = 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{75}{4} = \frac{125}{8}$