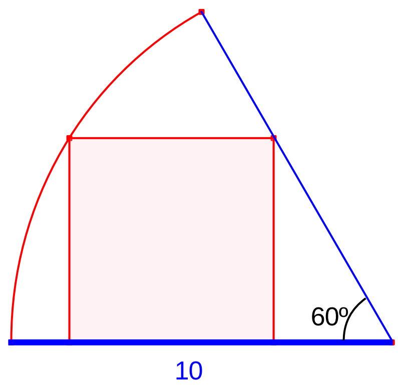
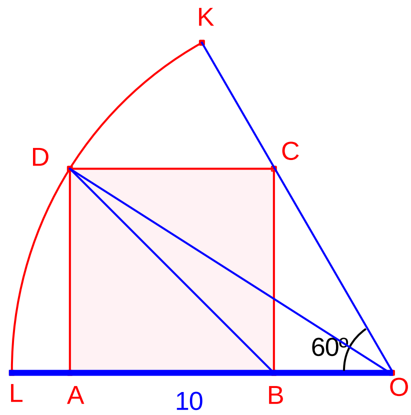
Problemes de Geometria per a l'ESO 453

4521.- Un sector de 60º i radi 10 té inscrit un quadrat.
Calculeu la seua àrea.



Solució:



AB=c

OD=10

angleDBO=135º

BD=sqrt(2)·c

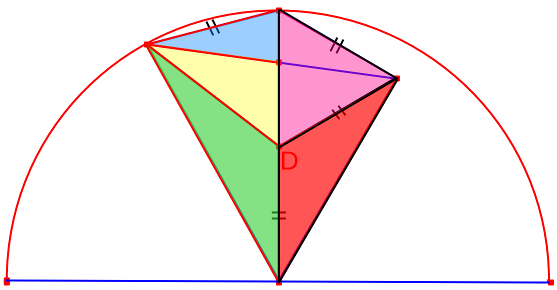
BD=c·sqrt(3)/3

teorema del cosinus DBO

100=2c²+3c²+(2/3)sqrt(3)

[ABCD]=300/(7+2·sqrt(3))

4522.- La figura està formada per una semicircumferència.
Els triangles roig i morat tenen la mateixa àrea.
Calculeu la proporció de les àrees dels triangles:
$blau : groc : verd$



Solució:
Siga $\overline{OB} = R = 1$

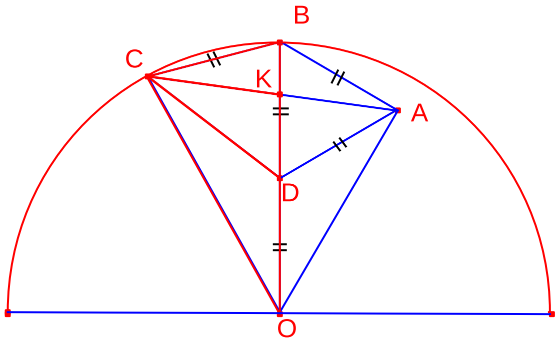
$\overline{OD} = \overline{DB} = \overline{DA} = \overline{BD} = \frac{1}{2}$

$\angle DBA = 60°, \angle BOA = 30°$

Siga $\angle COB = 2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{1}{4}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}, \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}},$



$\angle ABC = 150º - \alpha$

$\angle CAB = 15° + \frac{\alpha}{2}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KAB}$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(75° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\overline{BK}}{\sin\left(15° + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\overline{BK} = \frac{\sin\left(15° + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cdot\sin\left(75° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\overline{DK} = \frac{1}{2} - \overline{BK} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

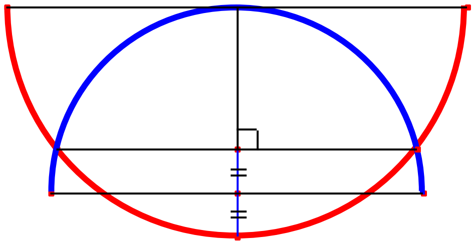
$$\overline{OD} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{DK}} = \frac{3-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

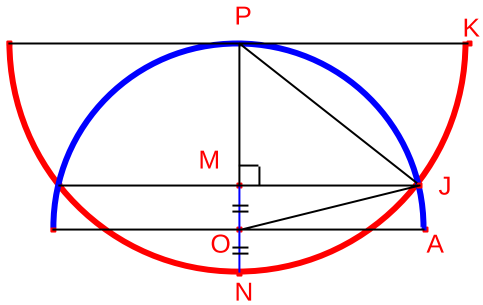
$$\frac{\overline{DK}}{\overline{OD}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Els triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases
$blau : groc : verd = \overline{BK} : \overline{DK} : \overline{OD} = 1 : \Phi : \Phi^2$

4523.- La figura està formada per dos semicircumferències.
Calculeu la proporció entre el radi de la semicircumferència roja i el radi de la circumferència blava.



Solució:



OP=OA=r

OM=ON=a

PN=PK=R=r+a

Teorema Pitàgores PMJ, OMJ

$(r+a)^2-(r-a)^2=r^2-a^2$

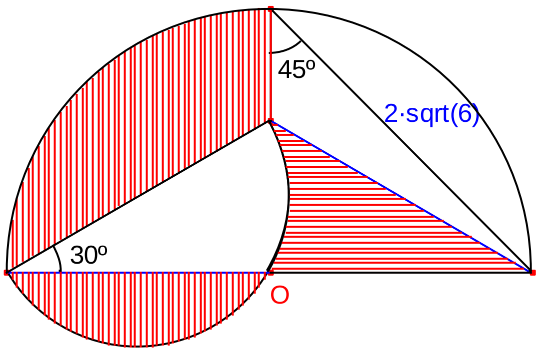
$4ra=r^2-a^2$

a=(-2+sqrt(5))r

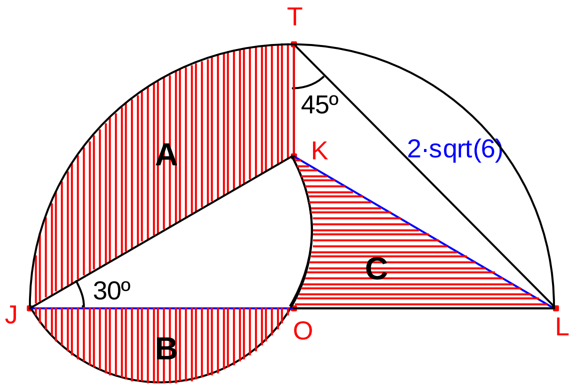
R=r+a=(-1+sqrt(5))r

R/r=-1+sqrt(5)

4524.- En la figura calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga la semicircumferència gran de centre O i radi $\overline{OL} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{LT} = 2\sqrt{3}$

Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{JK} = \frac{2}{\sqrt{3}}2\sqrt{3} = 4$

Calculem l'àrea de les tres regions:

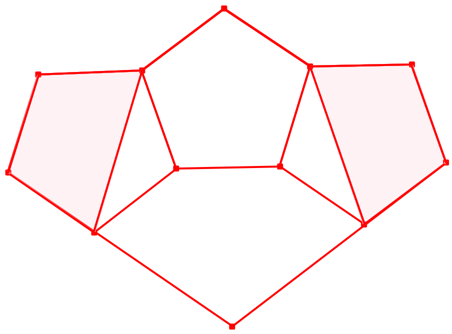
$$A = \frac{1}{4}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 = 3\pi - 2\sqrt{3}$$

$$B = \frac{1}{3}\pi 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

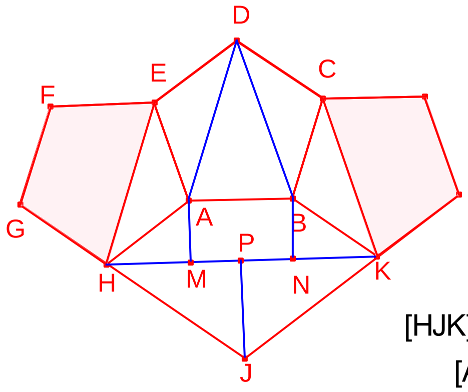
$$C = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 - \left(\frac{1}{6}\pi 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\right) = 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

$$A + B + C = \frac{11}{3}\pi$$

4525.- La figura està formada per tres pentàgons regulars i un pentàgon irregular.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:



AB=1

AD=BD=Phi

[ABCDE]=((1+3·Phi)/2·sin 36º

[EFGH]=(1+2·Phi)/2·sin 36º

angleAHM=180º-angleHAB=36º

HM=cos 36º=Phi/2

[HKBA]=(2+Phi)/2·sin 36º

HP=(1+Phi)/2

HJ=Phi

[HJK]=(1+Phi)·Phi/2·sin 36º=(1+2·Phi)/2·sin 36º

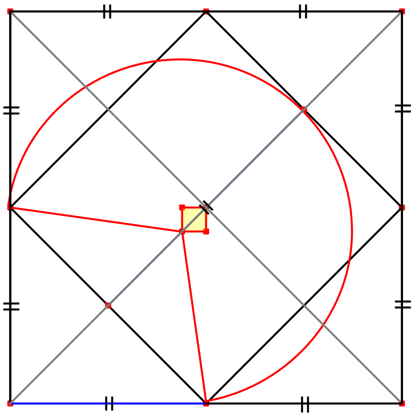
[AHJKB]=(3+3·Phi)/2·sin 36º

[rosa]=2·[EFGH]=(1+2·Phi)sin 36º

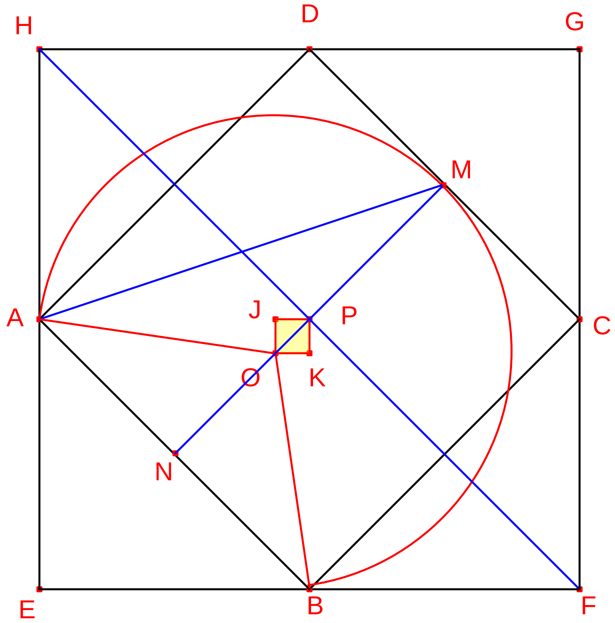
[total]=3·[ABCDE]+[AHJKB]=(3+6·Phi)sin 36º

[rosa]/[total]=1/3

4526.- La figura està formada per tres quadrats. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat ombrejat i el quadrat exterior.



Solució:



AB=2

AN=1

R=OA=OM

AM=sqrt(5)

[ABM]=2=(2·5)/(4R)

R=5/4

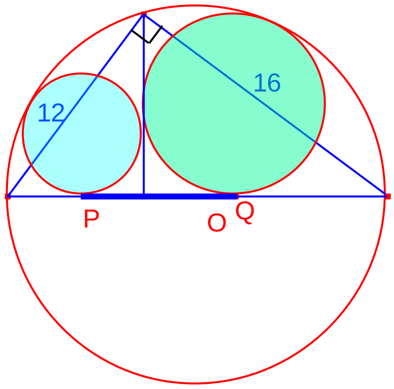
OP=1/4

[OJPK]=OP²/2=1/32

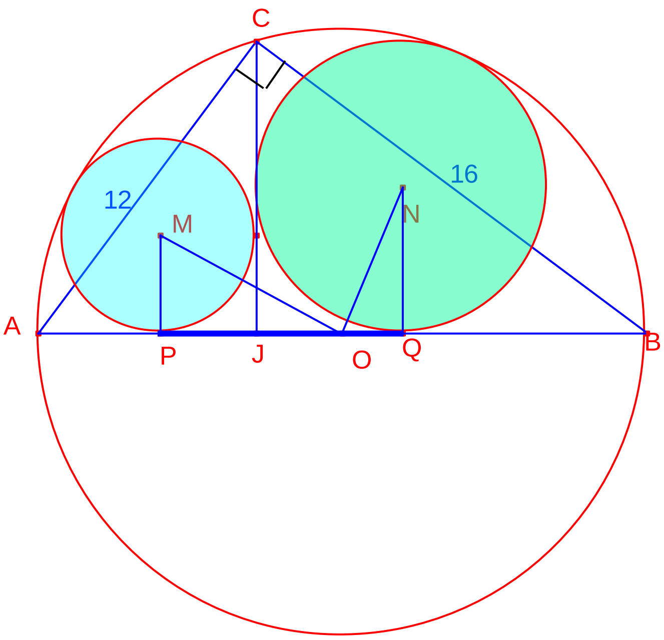
[EFGH]=2·[ABCD]=8

[OJPK]/[EFGH]=1/256

4527.- La figura està formada per una circumferència de centre O i dues circumferències tangents al diàmetre.
Calculeu la distància entre els dos punts de tangència $\overline{PQ}$



Solució:



AB=20

OA=10

MP=r, NQ=R

PQ=R+r

AJ=144/20=36/5

OJ=10-AJ=14/5

teorema Pitàgores MPO

$(10-r)^2=r^2+(r+14/5)^2$

r=16/5

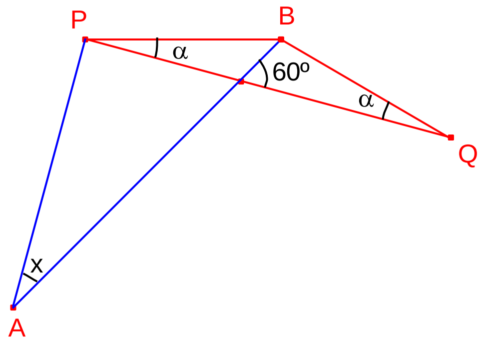
teorema Pitàgores OQN

$(10-R)^2=R^2+(R-14/5)^2$

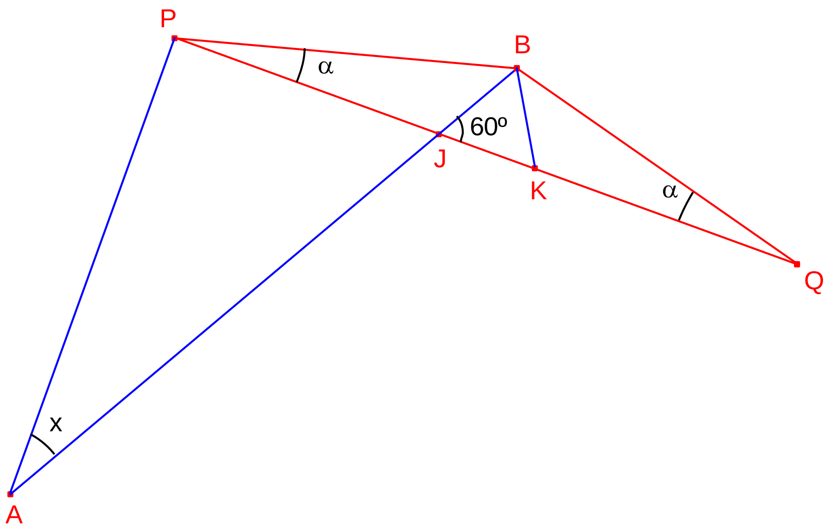
R=24/5

PQ=R+r=8

4528.- En la figura, $\overline{PQ} = \overline{AB}$.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

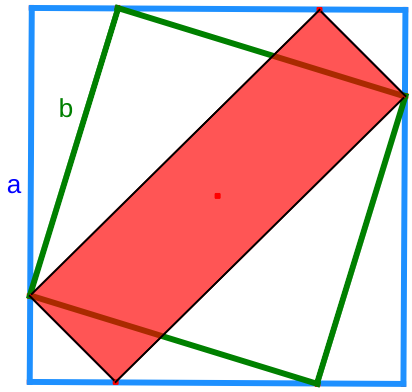


$\overline{PB} = \overline{QB}$

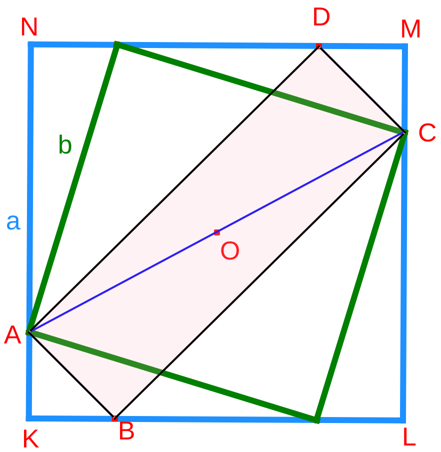
Considerem el triangle equilàter $\overset{\Delta}{JKB}$

Els triangles $\overset{\Delta}{PJB}, \overset{\Delta}{QJB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PJ} = \overline{QK}$
$\overline{PQ} = \overline{AB}$, aleshores, $\overline{AJ} = \overline{PJ} + \overline{QK}$
$\overline{AJ} = 2 \cdot \overline{PJ}, \angle AJP = 60°$
Aleshores, $x = 30°$

4529.- La figura està formada per dos quadrats de costats a, b i un rectangle. Calculeu l’àrea del rectangle



Solució:



AB=c, BC=d

AC=b·sqrt(2)

teorema Pitàgores ABC

$c^2+d^2=2b^2$

KA=KB=c·sqrt(2)/2

LB=LC=d·sqrt(2)/2

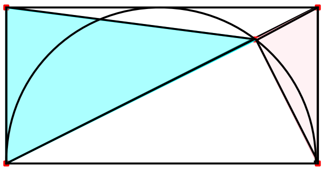
a=(c+d)·sqrt(2)/2

$a^2=(1/2)(c+d)^2$

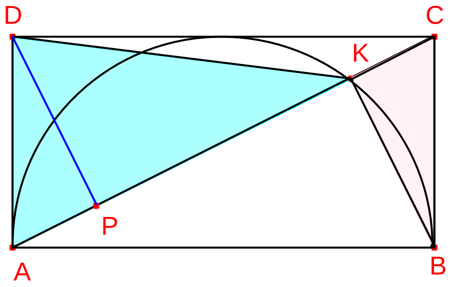
$a^2=b^2+dc$

$[ABCD]=cd=a^2-b^2$

4530.- La figura està formada per un rectangle, una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats.



Solució:



angleAKB=90º

BC/AB=1/2

Els triangles AKB, BKC, ABC són semblants

CK=a, BK=2a, AK=4a

Els triangles BKC, AKD tenen la mateixa altura DP=BK

[BKC]/[AKD]=CK/AK=1/4