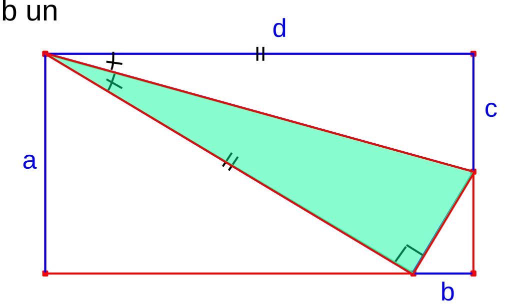
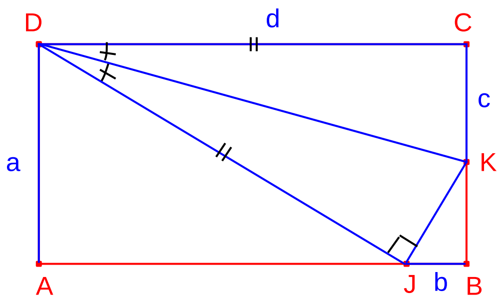
4531.- La figura està formada per un rectangle amb un triangle rectangle inscrit.
Calculeu
$$\frac{ac}{bd}$$



Solució:

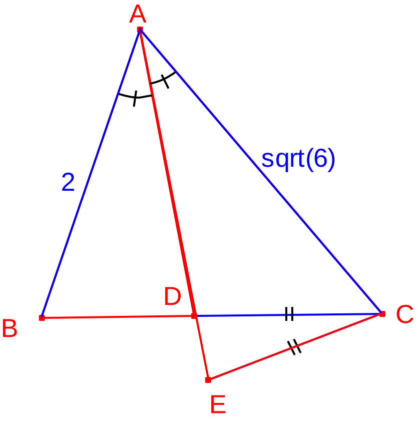


Els triangles DCK DJK són iguals
JK=CK=c
DJ=CD=d

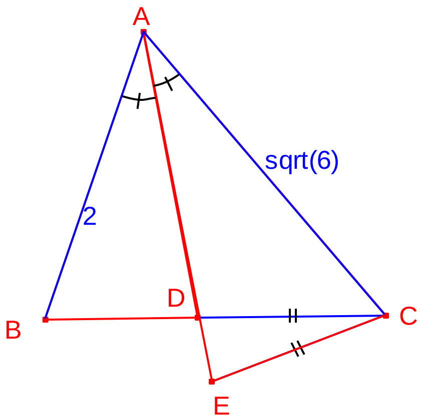
Els triangles DAJ, BJK són semblants
Aplicant el teorema de Tales:
b/c=a/d
ac/bd=1

4532.- En la figura $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = \sqrt{6}, \angle BAD = \angle DAC, \overline{CD} = \overline{CE}$

Calculeu la proporció entre les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ACE}$



Solució:



CD=CE=a, BD=b

Propietat bisectriu

b/a=2/sqrt(6)

angleBAD=angleDAC=x

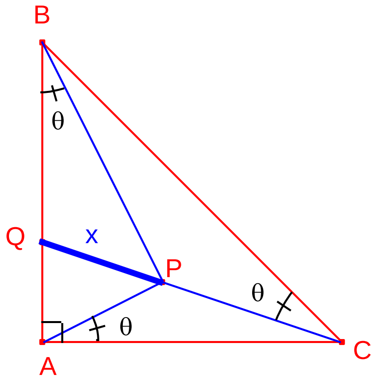
angleABD=y

angleECA=y

els triangles ABD, ACE són semblants

[ABD]/[ACE]=(b/a)²=2/3

4533.- En la figura el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$ és isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$
$\theta = \angle QBP = \angle PAC = \angle ACP, \overline{PC} = \sqrt{2}$
Calculeu la mesura del segment $x = \overline{PQ}$



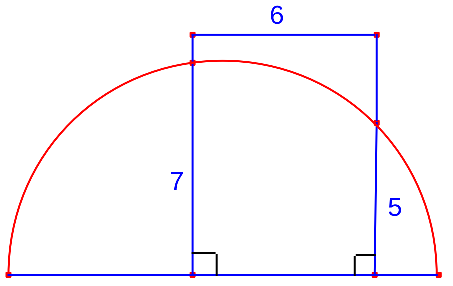
Solució:
$\angle APB = 90°$
$\angle BPC = 1340°, \angle QPB = 45°$

Els triangles $\overset{\Delta}{ACP}, \overset{\Delta}{CBP}$ són semblants i de raó $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : \sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BP} = 2$
$\overline{AP} = 1$

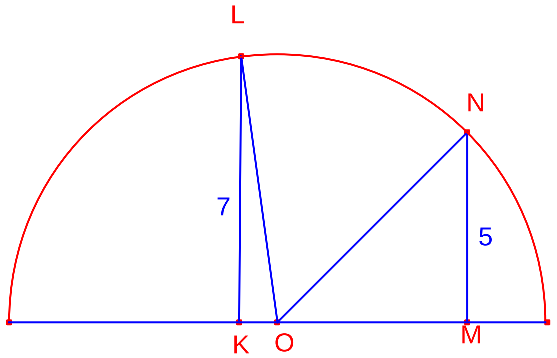
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$c = \overline{AB} = \sqrt{5}, \overline{BC} = \sqrt{10}$

Aplicant el la propietat de la bisectriu al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$$\frac{\overline{AQ}}{1} = \frac{c - \overline{AQ}}{2} = \frac{c}{3}$$
$$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \overline{BQ} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{BQC}, \overset{\Delta}{PQB}$ són semblants:
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$
$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4534.- La figura està formada per un semicercle i dos segments perpendiculars al diàmetre de longituds 7, 5.
La distància entre els dos segments és 6.
Calculeu el radi del semicercle.



Solució:



OL=ON=r

KM=6

OK=6, OM=6-a)

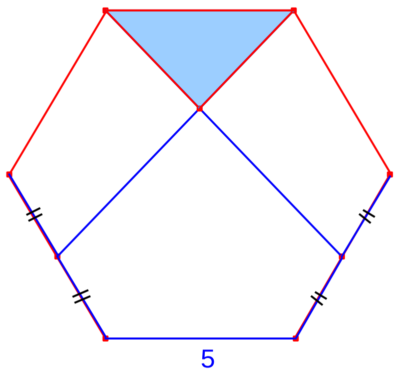
teorema Pitàgores LKO, OMN

$r^2=49+a^2$

$r^2=25+(6-a)^2$

a=1, r=5·sqrt(2)

4535.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 5.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 5$ de centre O
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{FE}, \overline{DE}$
$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del trapezi $EDCF$.

$$\overline{MN} = \frac{5+10}{2} = \frac{15}{2}$$

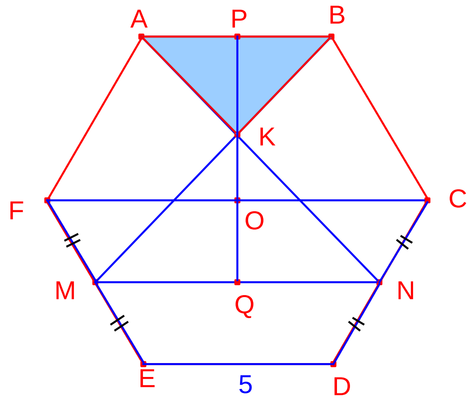
$$\overline{PQ} = \frac{3}{4} \cdot 5\sqrt{3}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{MNK}$ són semblants i de raó $2:3$

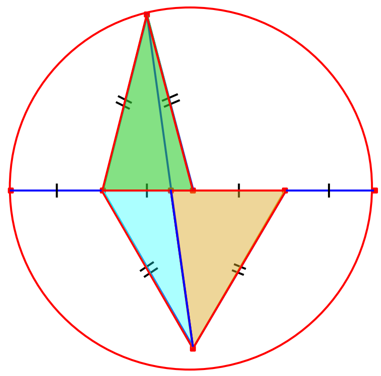
$$\overline{PK} = \frac{2}{5} \cdot \overline{PQ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

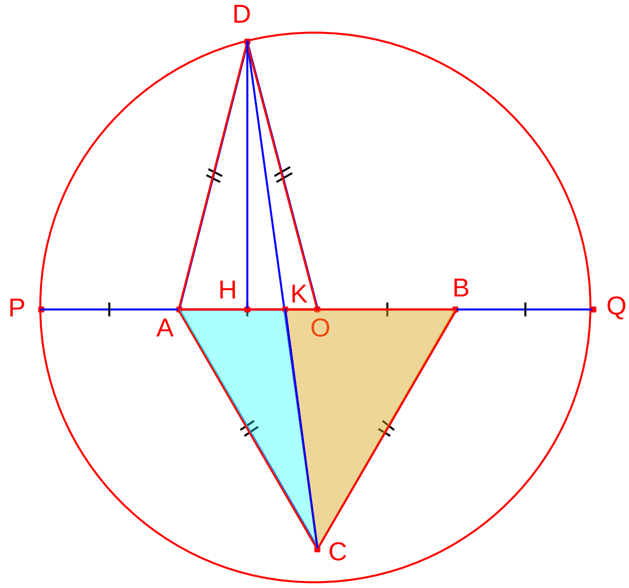
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



4536.- El diàmetre de la circumferència s'ha dividit en quatre parts iguals i s'han dibuixat tres triangles. Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava.





Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = r = 1$

$\overline{OD} = \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} = 1$

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

Siga H el punt mig del segment $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.

Siga $\theta = \angle DAH$

$\cos\theta = \dfrac{1}{4}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}1^2 \cdot \sin(60^\circ + \theta) = \frac{1}{16}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

$$S_{ACD} = S_{AKC} + S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AK} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \overline{AK} \cdot \left(2 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

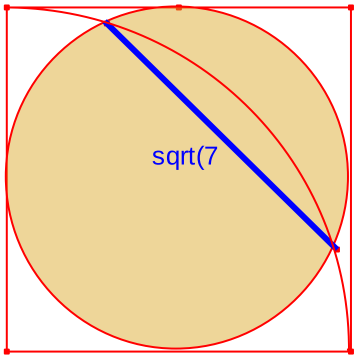
$$\overline{AK} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\left(2 + \sqrt{5}\right)} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{BK} = 1 - \overline{AK} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

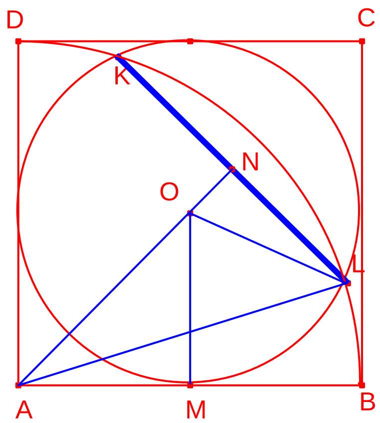
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AKC}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

4537.- La figura està formada per un quadrat que té inscrit una circumferència, un quadrant i un segment intersecció del quadrat i de la circumferència.
Calculeu l'àrea del cercle ombrejat que mesura $\sqrt{7}$



Solució:



KL=sqrt(7)

OM=r, AB=2r

teorema Pitàgores AMO

AO=r·sqrt(2)

teorema Pitàgores ONL

ON=sqrt(r^2-7/4)

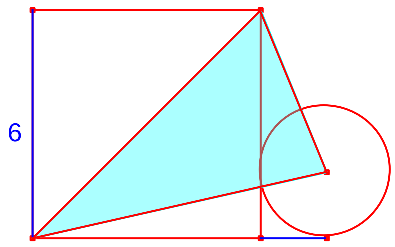
teorema Pitàgores ANL

$4r^2$=7/4+(r·sqrt(2)+sqrt(r^2-7/4)$)^2$

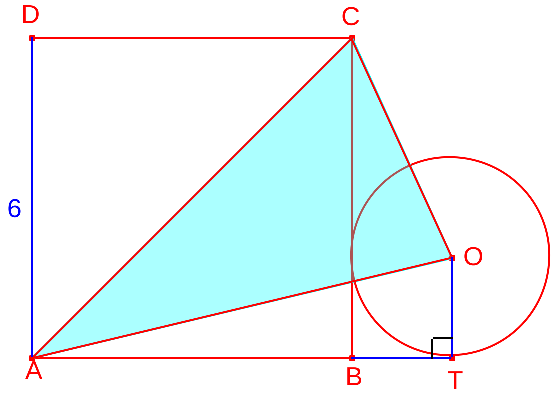
r=sqrt(2)

S=2·Pi

4538.- La figura està formada per un quadrat de costat 6 i una circumferència tangent a un costat i a la prolongació d'un altre.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



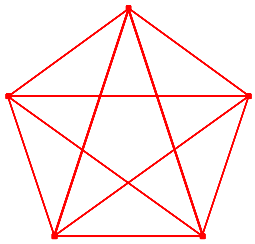
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{BT} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = 6\sqrt{2}$

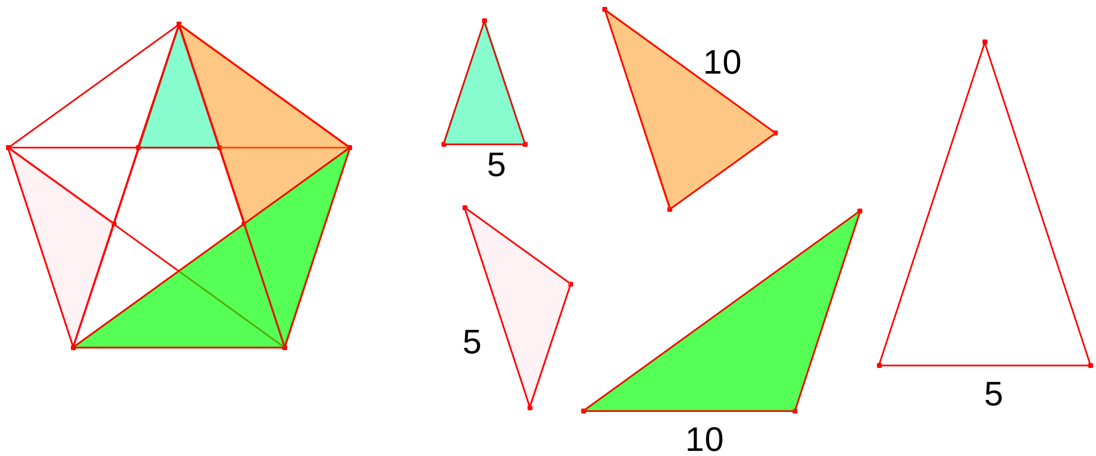
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$
$\overline{AO} = \sqrt{2r^2 - 12r + 36}$
Siga $\alpha = \angle OAT$
$\cos\alpha = \dfrac{6+r}{\sqrt{2r^2-12r+36}}, \sin\alpha = \dfrac{r}{\sqrt{2r^2-12r+36}}$
$\angle CAO = 45° - \alpha$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$ és:
$S_{AOC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2r^2-12r+36} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin(45° - \alpha) =$
$= 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2r^2-12r+36}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{6+r}{\sqrt{2r^2-12r+36}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{r}{\sqrt{2r^2-12r+36}}\right) = 18$

4539.- Quants triangles conté la figura?

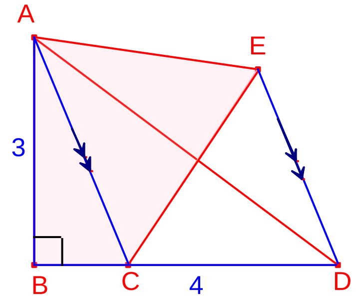


Solució:



Total: 35

4540.- En la figura calculeu l'àrea de la regió ombrejada si els segments $\overline{AC}, \overline{DE}$ són paral·lels.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ACE}, \overset{\Delta}{ACD}$ tenen la mateixa àrea.

$S_{ABCE} = S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$