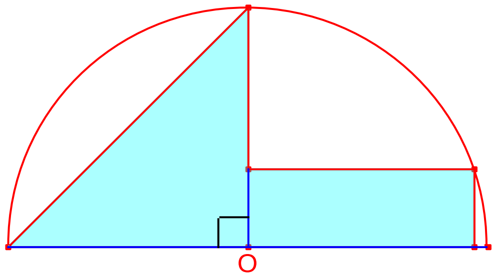
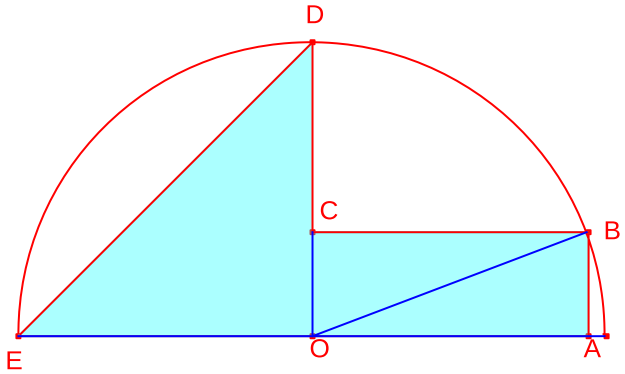
Problemes de Geometria per a l'ESO 455

4541.- La figura està formada per una semicircumferència un triangle rectangle i un rectangle de perímetre 20.
Calculeu l'àrea de la figura ombrejada.



Solució:



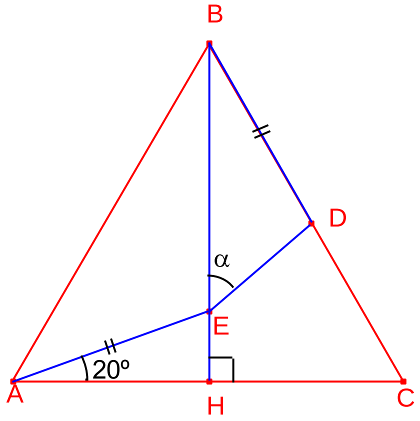
OA=x, AB=10-x
OB=r

teorema Pitàgores OAB

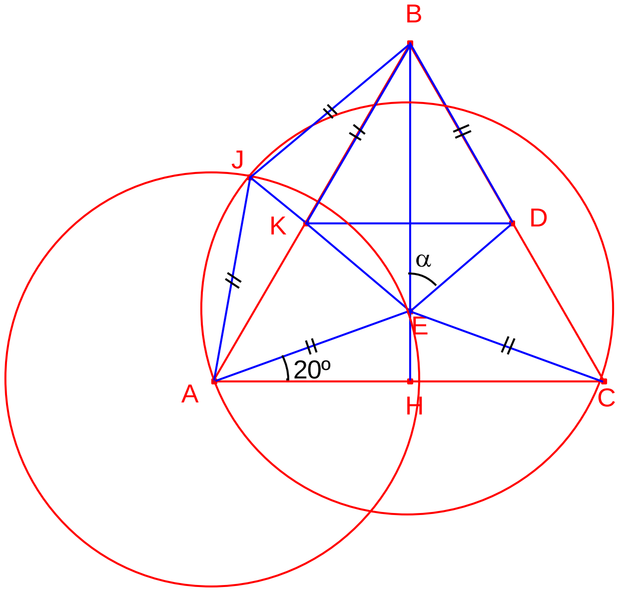
$r^2=2x^2-20x+100$

$[ABCDE]=r^2/2+x(10-x)=50$

4542.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter.
Siga $\overline{BH}$ l'altura.
Siga E un punt de l'altura tal que $\angle EAC = 20°$
siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{AE} = \overline{BD}$
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha = \angle BED$



Solució:



AEJ equilàter

ACE, ABJ iguals

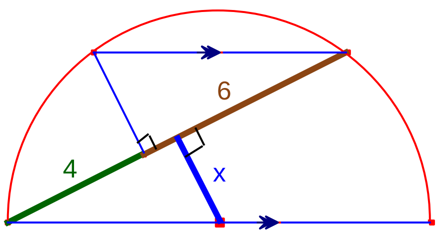
angleJKB=80º

angleBKD=60º

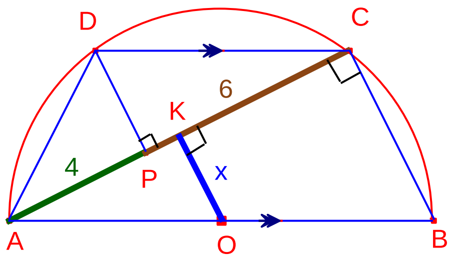
angleDKE=40º

angleKBE=angleBED=50º

4543.- La figura està formada per una semicircumferència una corda de longitud 10 i una corda paral·lela al diàmetre.
Calculeu la mesura del segment x

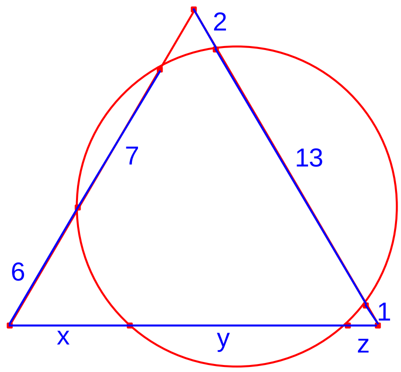


Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga la corda $\overline{CD}$ paral·lela al diàmetre $\overline{AB}$
$\overline{BC} = \overline{AD}$
Siga la corda $\overline{AC} = 10, \overline{AP} = 4$
Siga K de la corda $\overline{AC}$ tal que $\angle OKC = 90°$
K és el punt mig de la corda $\overline{AC}$



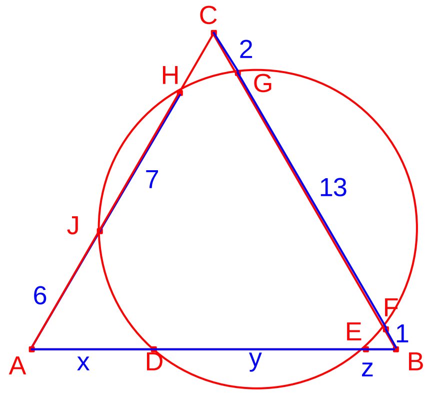
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKO}, \overset{\Delta}{ACB}$ són semblants i de raó $1 : 2$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BC} = 2x$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKO}, \overset{\Delta}{CPD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{DP} = \frac{6}{5}x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$4x^2 = 16 + \frac{36}{25}x^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{5}{2}$

4544.- La figura està formada per un triangle equilàter i una circumferència.
Calculeu la mesura dels segments x, y, z



Solució:

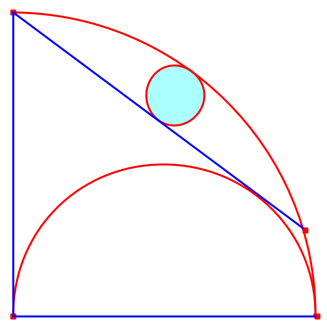
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$,
Siguen $\overline{BF} = 1, \overline{FG} = 13, \overline{CG} = 2, \overline{AJ} = 6, \overline{JH} = 7$
Siguen $\overline{AD} = x, \overline{DE} = y, \overline{BE} = z$
$\overline{AB} = 16$
Siga $\overline{CH} = a$
$a = 3$
$z = 16 - (x + y)$



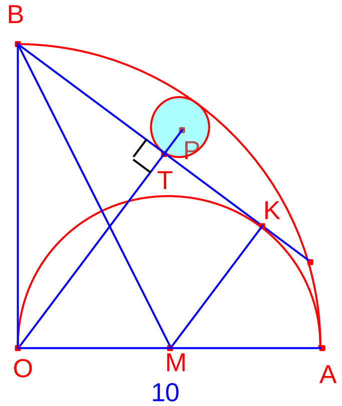
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:
$x(x + y) = 6 \cdot 13$
Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:
$(16 - x)(16 - (x + y)) = 1 \cdot 14$

$$\begin{cases} x^2 + xy = 78 \\ 256 - 32x - 16y + x(x + y) = 14 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + xy = 78 \\ y = 20 - 2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 10 - \sqrt{22} \\ y = 2\sqrt{22} \\ z = 6 - \sqrt{22} \end{cases}$$

4545.- La figura està formada per un quadrant de radi 10 un semicercle sobre un radi del quadrant i un cercle.
Calculeu l'àrea del cercle.

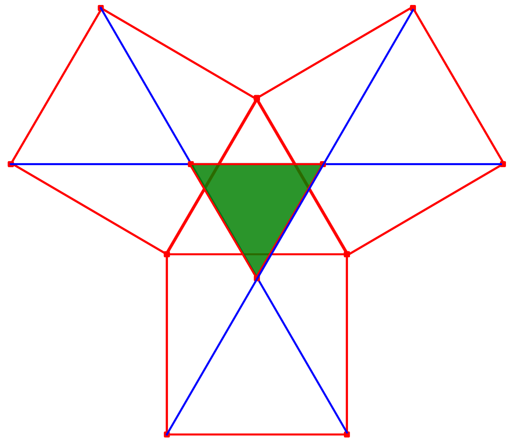


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 10$
Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MA} = 5$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$



Siga $\alpha = \angle OBM$
$\angle OBK = 2\alpha$
$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$
$\sin 2\alpha = \dfrac{4}{5}$
$\overline{OT} = 10 - 2s$
$\dfrac{10-2s}{10} = \sin 2\alpha = \dfrac{4}{5}$
$s = 1$
L'àrea del cercle és:
$S_P = \pi$

4546.- La figura està formada per un triangle equilàter i quatre quadrats sobre els seus costats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea total de la figura.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = d$

$\overline{MN} = c\sqrt{3}$

$\overline{KP} = \frac{1}{2}c$

$\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KP} + \overline{MN} = \left(1 + \sqrt{3}\right)c$

$d = \overline{FD} = \overline{KL} - 2c = \left(\sqrt{3} - 1\right)c$

L'àrea del triangle ombrejat és:

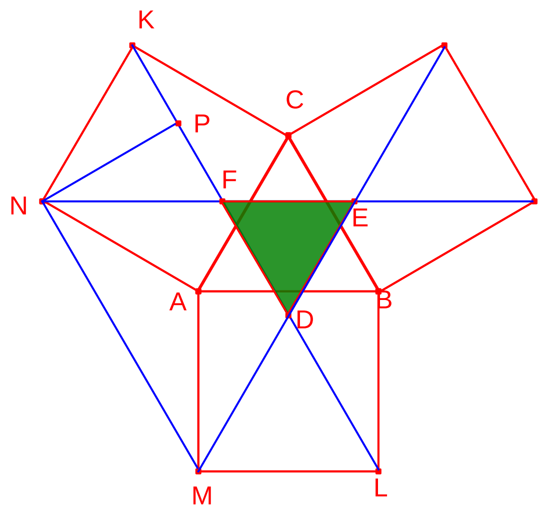
$$S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 c^2 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}c^2$$

L'àrea total és:

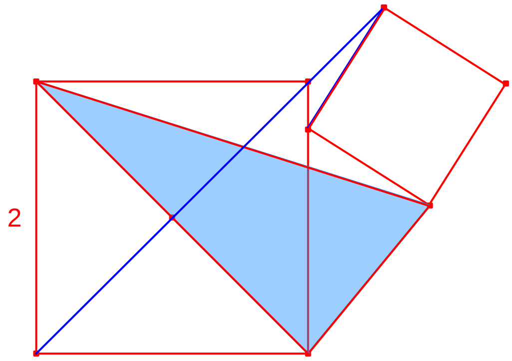
$$S_{total} = S_{ABC} + 3 \cdot c^2 = \frac{12 + \sqrt{3}}{4}c^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{total}} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}}{\frac{12 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{2\left(9\sqrt{3} - 14\right)}{47}$$



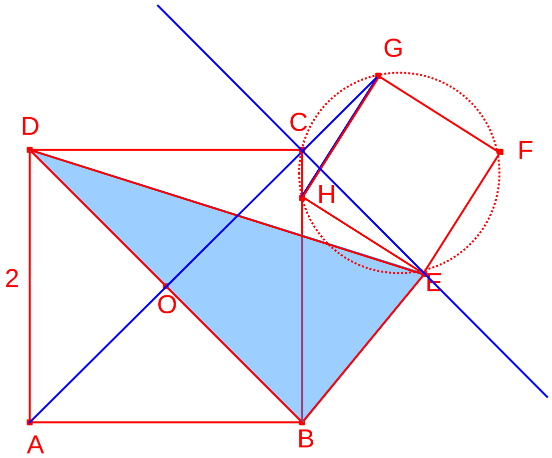
4547.- La figura està formada per dos quadrats el de l'esquerra de costat 2. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



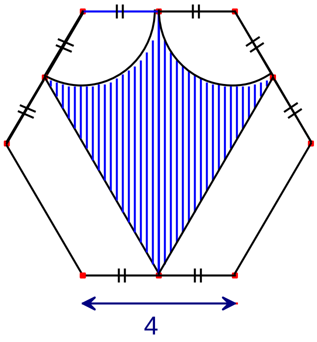
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$ de centre O.
Siga el quadrat $EFGH$ tal que G pertany a la recta AC i H al costat $\overline{BC}$
$\angle GCH = 135°, \angle GFH = 45°$
Aleshores, el quadrilàter $CHFG$ és cíclic.
Per tant, el pentàgon $EFGCH$ és cíclic.
$\angle ECH = \angle EGH = 45°$
Aleshores $\angle DCE = 135°$
$\angle BDC = 45°$
Aleshores , la recta CE és paràlesla a la recta BD.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBE}$ és:

$S_{DBE} = S_{DBC} = \frac{1}{2}2^2 = 2$



4548.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 4 que s'han dividit cadascun dels costats en dues parts iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

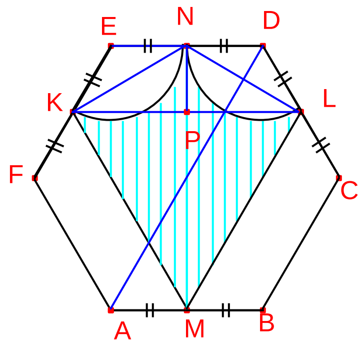


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 4$
$\overline{ML}$ és parla·lela mitjana del trapezi $BCDA$, aleshores:

$$\overline{ML} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) = 6$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$
$\overline{PN} = \sqrt{3}$
L'àrea del cometa $MLNK$ és:

$$S_{MLNK} = S_{MLK} + S_{KLN} = \frac{\sqrt{3}}{4}6^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$



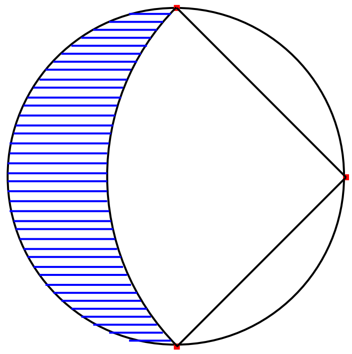
L'àrea del segment circular de centre E radi 2 i 120º és:

$$S_{segment} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

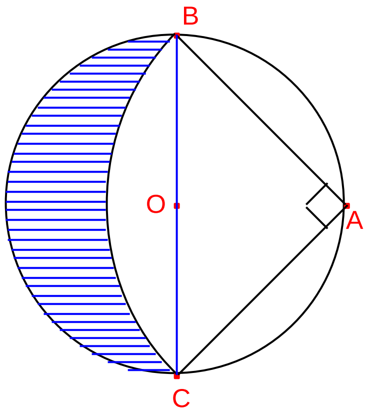
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrilàter MLNK menys dos segments circulars:

$$S_{ombrejada} = 12\sqrt{3} - 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = 14\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \approx 15.8711$$

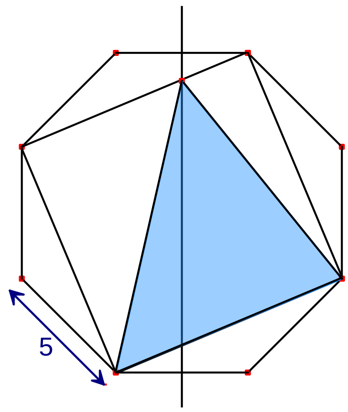
4549.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



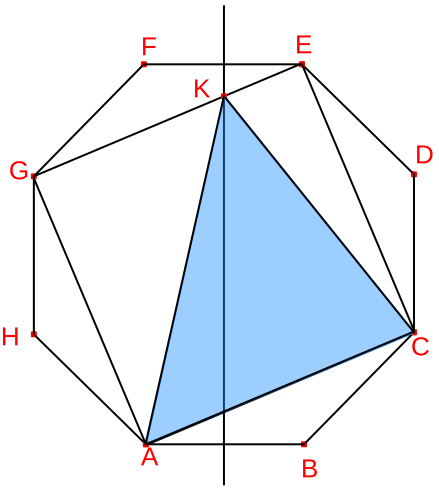
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $OA = 1$
Siga el quadrant de centre A i radi $\overline{AB} = \sqrt{2}$
L'àrea de la lúnula és:
$$S_{lúnua} = \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 1$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{lúnua}}{S_{cercle}} = \frac{1}{\pi}$$



4550.- La figura està formada per un octògon regular de costat 5.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



AK=c=5

[ACK]=(1/2)·[ACEG]

teorema cosinus ABC

$AC^2=(2+sqrt(2))\cdot c^2$

$[ACEG]=AC^2=(2+sqrt(2))\cdot c^2$

[ACK]=(25/2)·(2+sqrt(2))