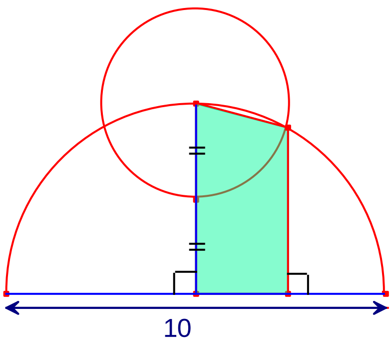
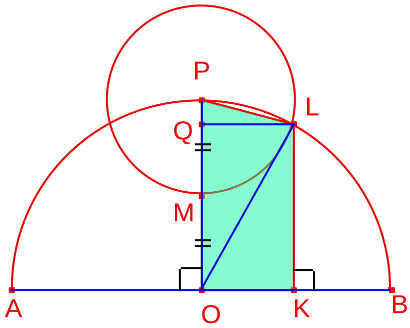
4551.- La figura està formada per un semicercle de diàmetre 10 i un cercle.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OP} = 5$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PL} = \frac{5}{2}$
Siga la projecció de L sobre $\overline{OP}$
Siga $\overline{PQ} = a, \overline{OQ} = 5 - a$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQL}$:

$$\overline{QL} = \sqrt{\frac{25}{4} - a^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OQL}$:

$$25 = (5-a)^2 + \frac{25}{4} - a^2$$

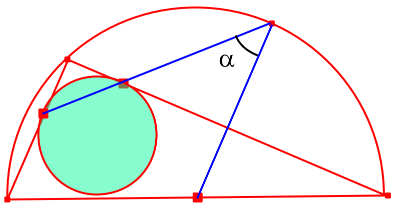
Resolent l'equació:

$$a = \frac{5}{8}$$

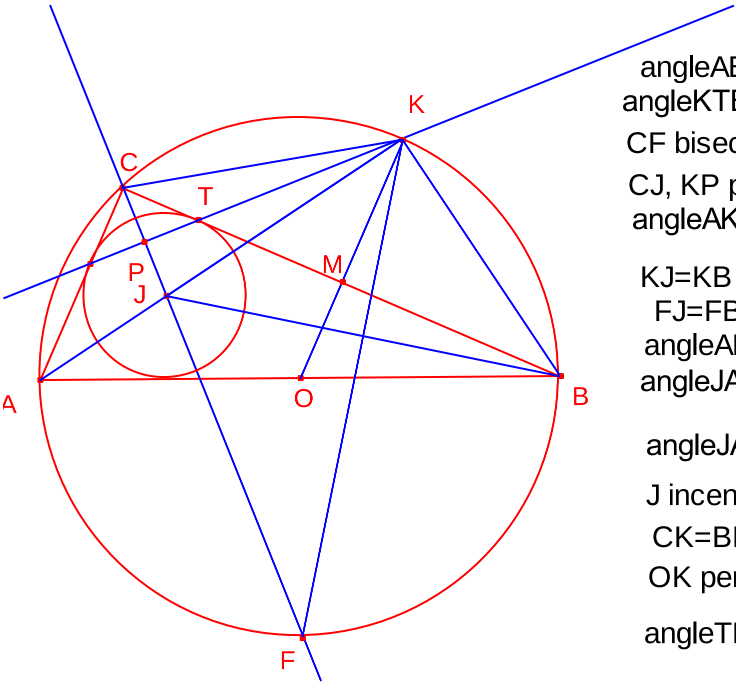
L'àrea del trapezi rectangle $OKLP$ és:

$$S_{OKLP} = \frac{5 + \left(5 - \frac{5}{8}\right)}{2} \sqrt{\frac{25}{4} - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{375\sqrt{15}}{128}$$

4552.- La figura està formada per una semicircumferència, un triangle inscrit en la circumferència i la circumferència inscrita al triangle. Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



angleABC=x
angleKTB=anglePTC=45º
CF bisecgtriu angle ACB
CJ, KP perpendiculars
angleAKF=angleFKB=45º

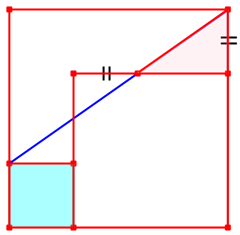
KJ=KB
FJ=FB=AF
angleAFC=x
angleJAF=90º-x/2

angleJAB=45º-x/2

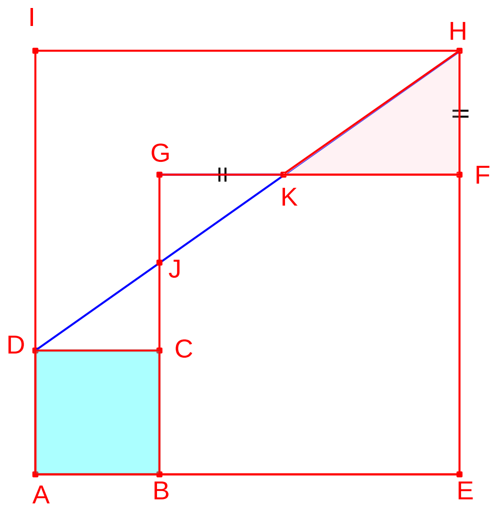
J incentre del triangle ABC
CK=BK
OK perpendicular BC

angleTKO=45º

4553.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i el quadrat menut.



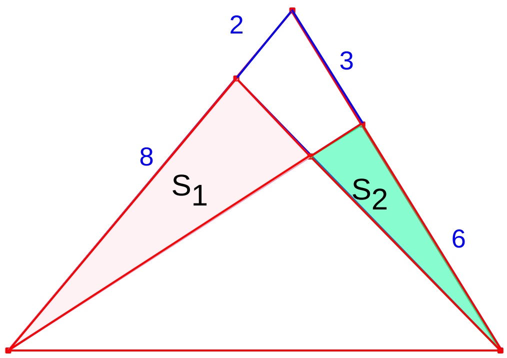
Solució:



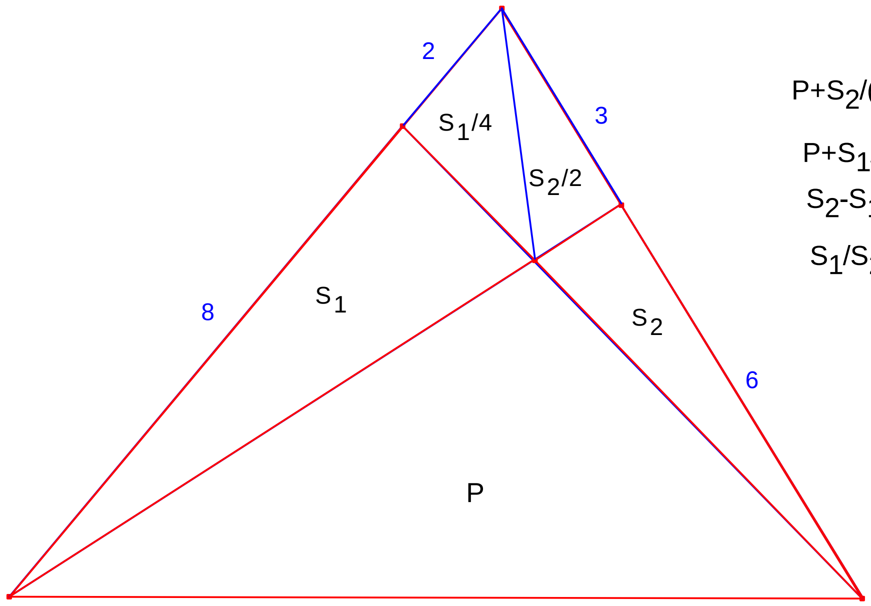
AB=a
BE=c
FH=GK=AB=a
KF=c-a
Els triangles DCJ, KGJ són iguals
GJ=CJ=(c-a)/2

Els triangles KFH, KGJ són semblants
Aplicant el teorema de Tales
a/(c-a)=(c-a)/2a
c=(1+sqrt(2))·a
[KFH]=(1/2)a(c-a)=a²·sqrt(2)/2
[KFH]/[ABCD]=sqrt(2)/2

4554.- Un costat del triangle s’ha dividit en dos segments de longituds 2, 8. Un altre costat s’ha dividit en dos segments de longituds 3, 6.
Calculeu la proporció entre les àrees S_1, S_2



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:



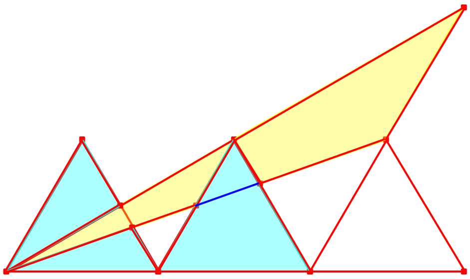
$P+S_2/((5/4)S_1+S_2/2=2$

$P+S_1/((3/2)S_2+S_1/4=4$

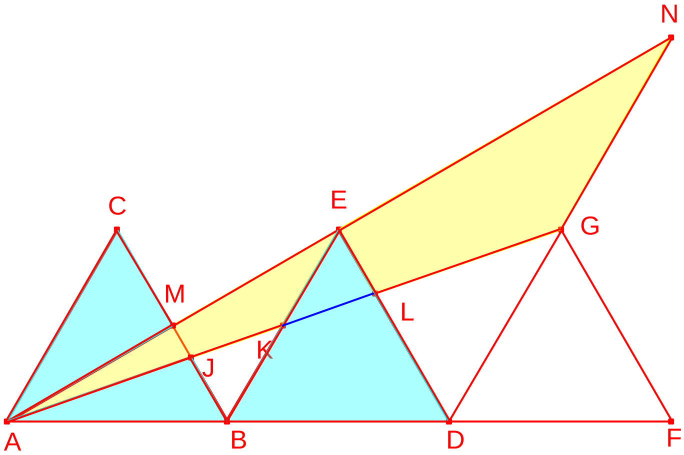
$S_2-S_1=(3/2)S_1-5\cdot S_2$

$S_1/S_2=12/5$

4555.- La figura està formada per tres triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava.



Solució:



Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{ADG}$ són semblants i de raó $1:2$
Aleshores, $\overline{AK} = \overline{KG}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{ADN}$ són semblants i de raó $1:2$
Aleshores, $\overline{GN} = \overline{DG}, \overline{KE} = \frac{1}{2}\overline{BE}$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:
$S_{AGN} = S_{ADG} = 2 \cdot S_{DFG}$

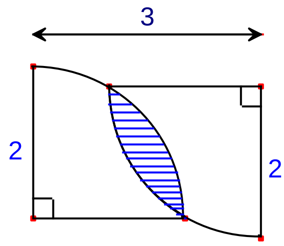
Els triangles $\overset{\Delta}{EKL}, \overset{\Delta}{GDL}$ són semblants i de raó $1:2$
Aleshores, $\overline{EL} = \frac{1}{2}\overline{DL} = \frac{1}{3}\overline{DE}$
$S_{KEL} = \dfrac{1}{2}S_{KLD} = \dfrac{1}{6}S_{DFG}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{ADE}$ són semblants i de raó $1:2$
Aleshores, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{DE}$, $\overline{AM} = \overline{ME}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AJM}, \overset{\Delta}{ALE}$ són semblants i de raó $1:2$
Aleshores, $\overline{MJ} = \frac{1}{2}\overline{EL} = \frac{1}{6}\overline{DE}$
$S_{AJM} = \dfrac{1}{6}S_{ABC}$
$S_{AJM} = S_{KEL}$

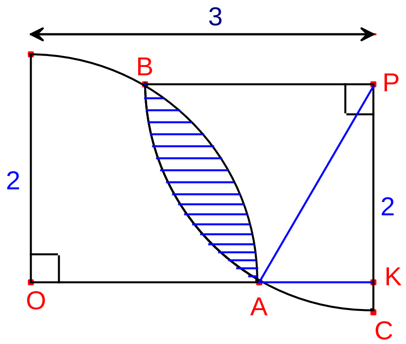
$S_{groga} = S_{AGN} - S_{KEL} = 2S_{ABC} - S_{KEL}$
$S_{blava} = 2 \cdot S_{ABC} - S_{AJM} = 2S_{ABC} - S_{KEL}$
$S_{groga} = S_{blava}$

4556.- La figura està formada per dos quadrants de radi 2.
Calculeu l'àrea de la intersecció dels dos quadrants.

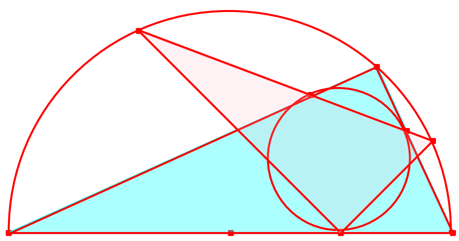


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PB} = \overline{PA} = \overline{PC} = 2$
Siga K la projecció de A sobre $\overline{PC}$
$\overline{AK} = 1$
Aleshores, $\angle APB = 60°$
L'àrea ombrejada és:

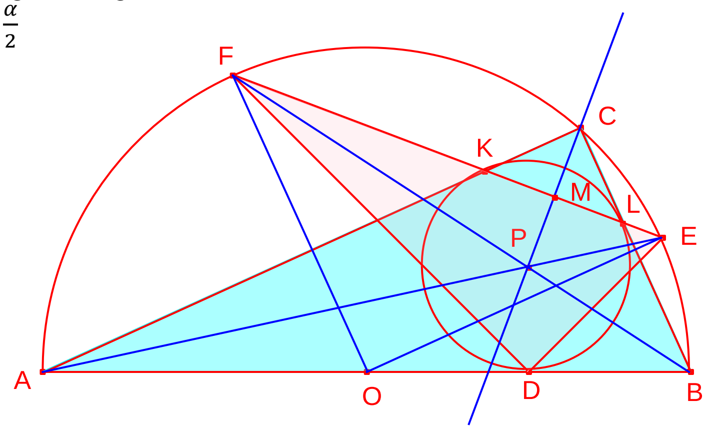
$$S_{ombrejada} = 2\left(\frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2\right) = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3} \approx 0.7247$$



4557.- La figura està formada per una semicircumferència i dos triangles.
El triangle gran té dibuixada la circumferència inscrita. L'altre triangle els costats passen pels tres punts de tangència.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles.



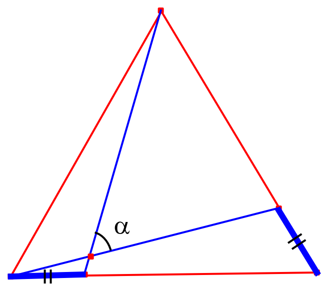
Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \angle BAC = \alpha$
Siga P el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{CP}, \overline{KL}$ perpendiculars. Siga M el punt mig del segment $\overline{CP}$
$\overline{PM} = \overline{CM}$, aleshores, $\angle MFP = \angle CFM = \frac{\alpha}{2}$
Aleshores, $\overline{FB}$ bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



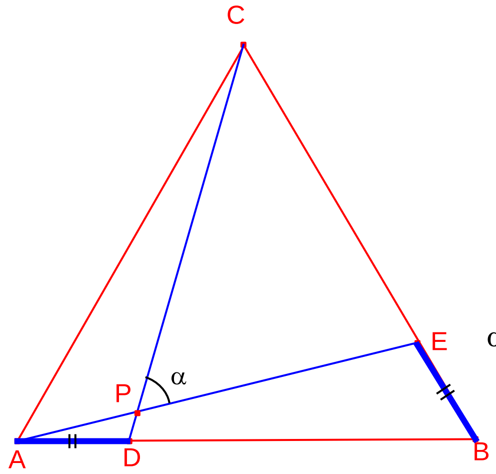
$\angle AKF = 45°$
$\widehat{AF} + \widehat{CE} = 90°$
$\widehat{AF} + \widehat{BE} = 90°$
$\angle FOE = 90°$
$\overline{EF} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}$

$\overline{BL} = \overline{BE}$
Els triangles $\overset{\Delta}{BLF}, \overset{\Delta}{BDF}$ són iguals
$\overline{FB}$ és mediatriu del segment $\overline{DL}$
$\angle DFP = \angle LFP = \alpha$
Anàlogament
$\overline{AK} = \overline{AD}$
Els triangles $\overset{\Delta}{AKE}, \overset{\Delta}{DBF}$ són iguals
$\overline{FB}$ és mediatriu del segment $\overline{DK}$
$\overline{KE} = \overline{DE}$
$\angle AED = \angle AEK = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$
$\angle DEF = 90° - \alpha$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{FED}$ són semblants.
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{FED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

4558.- La figura està formada per un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

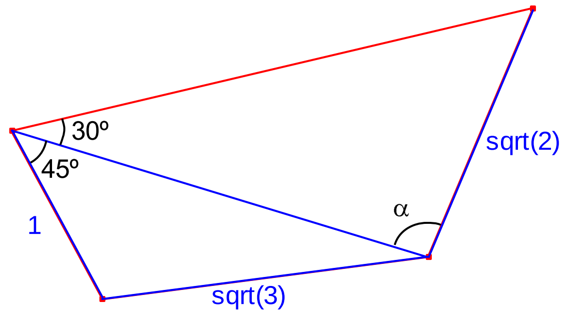


Els triangles ACD, ABE iguals
angle ACD=angleBAE=x

angleCAP=60º-x

α= angleCPE=x+60º-x=60º

4559.- En el quadrilàter de la figura calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

Siga el quadrilàter $ABCD, \overline{AD} = 1, \overline{AB} = \sqrt{3}, \overline{BC} = \sqrt{2}, \angle ADB = 45°, \angle BDC = 30°$

Siguen $\overline{BD} = x, \beta = \angle BCD$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$$3 = 1 + x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2}$$

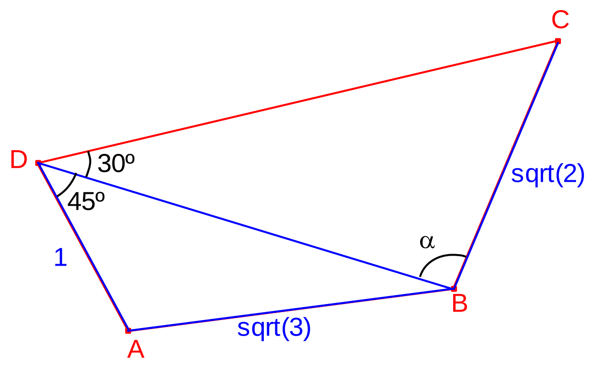
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2}}{\sin\beta}$$

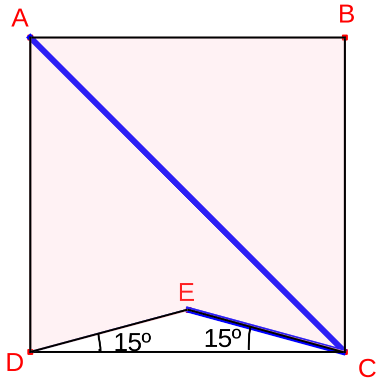
$$\sin\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\beta = 54°$$

$$\alpha = 180° - (30° + 54°) = 96°$$

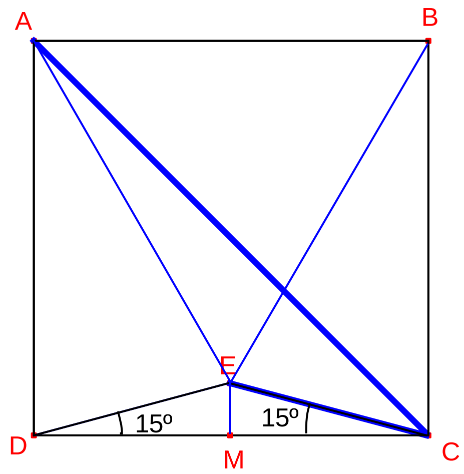


4560.- En la figura, $ABCD$ és un quadrat.
$\angle EDC = \angle ECD = 15°$, $\overline{AC} + \overline{CD} = 2$
Calculeu l'àrea del polígon $ABCED$.



Solució:

En la construcció el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter.
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat $ABCD$.



$$\frac{c}{2 \cdot \cos 15°} = \overline{CE}$$
$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} c$$
$$\overline{AC} = c\sqrt{2}$$
$$\overline{AC} + \overline{CD} = 2$$
$$c\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} c = 2$$
$$c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$
$$\frac{2 \cdot \overline{EM}}{c} = \tan 15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{EM} = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)c$$

L'àrea del quadrilàter $ABCED$ és:

$$S_{ABCED} = S_{ABCD} - S_{DCE} = c^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) c^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) c^2 =$$
$$= \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 = 1$$