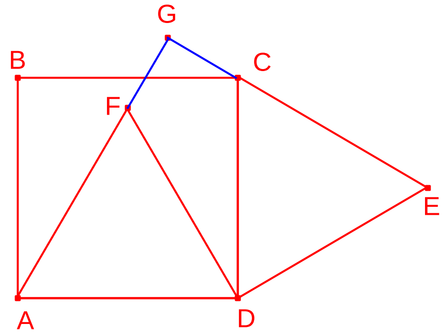
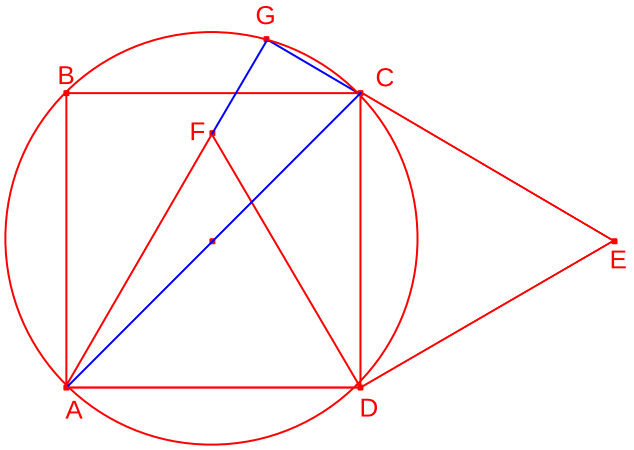
Problemes de Geometria per a l'ESO 457

4561.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$ i dos triangles equilàters $\overset{\Delta}{ADF}, \overset{\Delta}{CDE}$.
Si $\overline{CG} = \sqrt{2}$ calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$

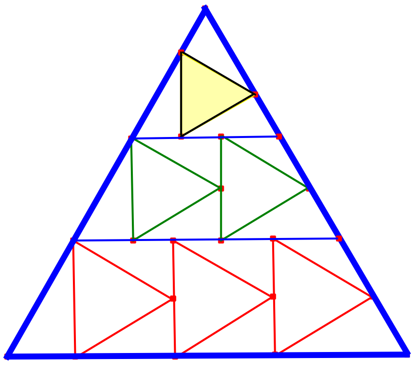


Solució:



CG=sqrt(2)
AB=c
angleAGC=90º
ADCG cíclic
ADCGB cíclic
angleGBC=angleGAC=15º
teorema sinus BCG
c/sin135º = sqrt(2)/sin 15º
c=AB=sqrt(6)+sqrt(2)

4562.- La figura està formada per set triangles equilàters.
El triangle blau té àrea 3^7 calculeu l'àrea del triangle equilàter ombrejat.

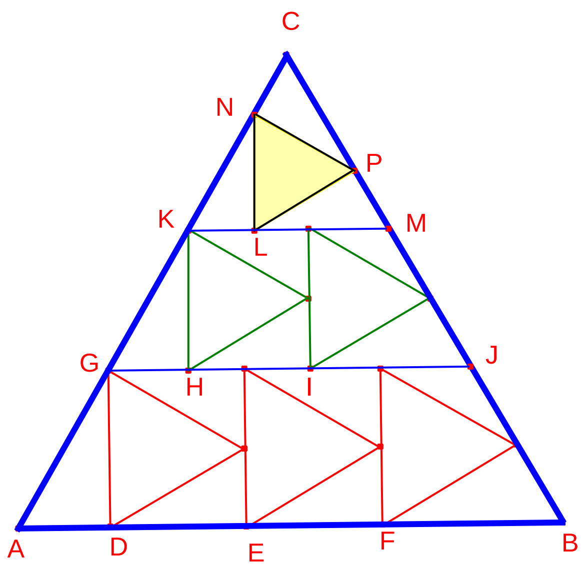


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

La seua àrea és $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

Siga $\overline{DG} = a, \overline{HK} = b, \overline{LN} = d$



$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \overline{FB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a, \overline{DF} = a\sqrt{3}$$

$$\overline{AB} = c = 2\sqrt{3} \cdot a$$

$$\overline{GJ} = c - \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{3}b, \overline{IJ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}b, \overline{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$\overline{GJ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}b$$

$$b = \frac{8}{9}a$$

$$\overline{KM} = c - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a + \frac{2\sqrt{3}}{3}b\right) = \frac{20\sqrt{3}}{27}a$$

$$\overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{3}d, \overline{LM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}d$$

$$\overline{KM} = \frac{20\sqrt{3}}{27}a = d\sqrt{3}$$

$$d = \frac{20}{27}a$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

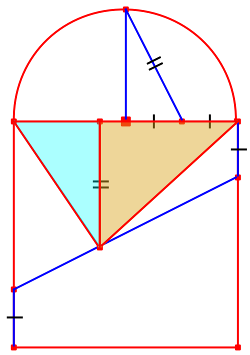
$$S_{ABC} = 3^7 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}12a^2$$

$$a^2 = \frac{3^6}{\sqrt{3}}$$

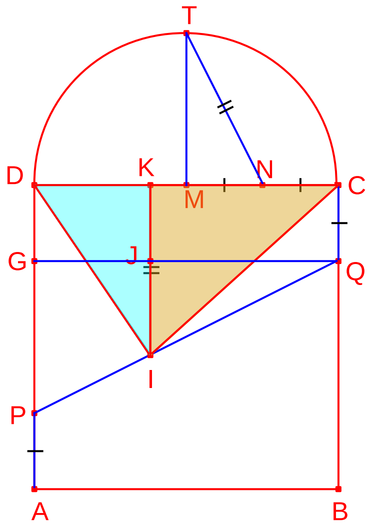
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LNP}$ és:

$$S_{LNP} = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{20^2}{3^6}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{400}{3^6}\frac{3^6}{\sqrt{3}} = 100$$

4563.- La figura està formada per un quadrat i un semicercle sobre un costat.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava

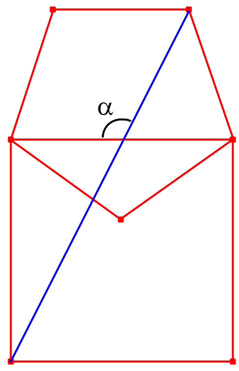


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siguen $\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{NN} = \overline{NC} = 1$
Siga $\overline{MT} = 2$
$\overline{MT} = \overline{KI} = \sqrt{5}$
Siga J la projecció de Q sobre $\overline{IK}$
Siga G la projecció de Q sobre $\overline{AD}$

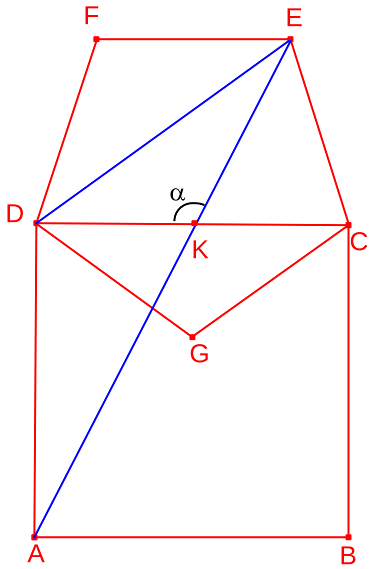


Siga $\overline{CK} = \overline{QJ} = a$
$\overline{GP} = 2, \overline{IJ} = \sqrt{5} - 1$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IJQ}, \overset{\Delta}{PGQ}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:
$a = 2(\sqrt{5} - 1)$
$\overline{DK} = 4 - a = 2(3 - \sqrt{5})$
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
La proporció entre les àrees dels triangles és:
$$\frac{S_{CKI}}{S_{DKI}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{DK}} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{2(3 - \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

4564.- La figura està formada per un quadrat i un pentàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

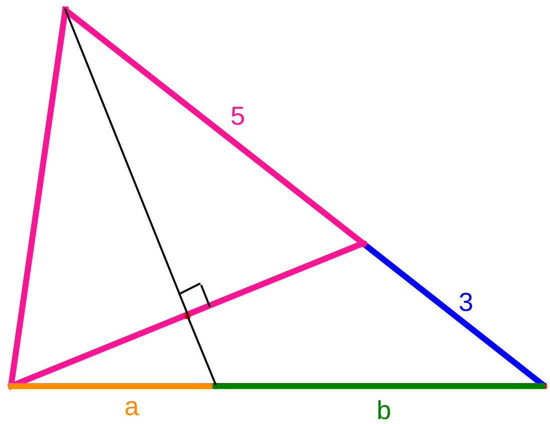


angleEDC=36º
angleEDA=126º

AD=DE
angleDAC=angleDEA=27º

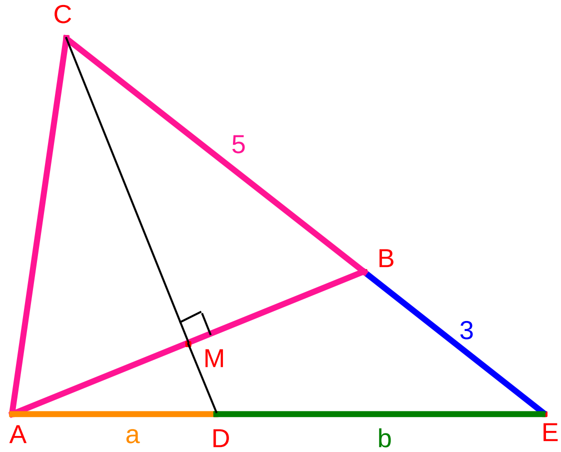
angleDKE=117º

4565.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 5.
Calculeu la mesura dels segments a, b



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 5$
Siguen $\overline{BE} = 3, \overline{AD} = a, \overline{DE} = b$



$\overline{AD}$ és bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{8}$$

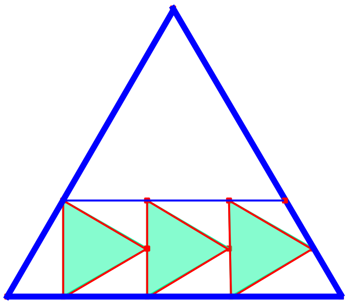
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEC}$:

$$(a+b)^2 = 25 + 64 - 5 \cdot 8 = 49$$
$$a + b = 7$$
$$b = 7 - a$$
$$\frac{a}{5} = \frac{7-a}{8}$$

Resolent l'equació:

$$a = \frac{35}{13}, b = \frac{46}{13}$$

4566.- La figura està formada per quatre triangles equilàters.
Els triangles equilàters ombrejats són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle exterior.

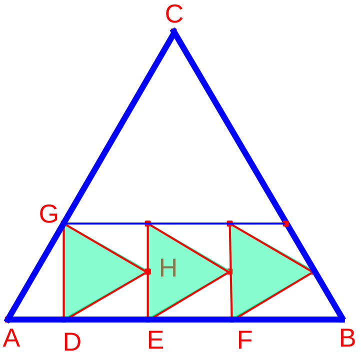


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

La seua àrea és $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

Siga $\overline{DG} = a$, costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DGH}$

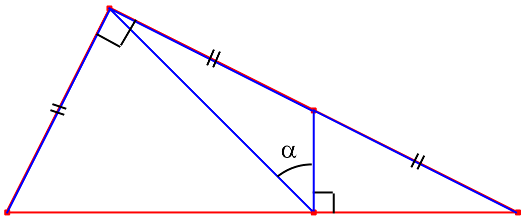


$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \overline{FB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a, \overline{DF} = a\sqrt{3}$$
$$\overline{AB} = c = 2\sqrt{3} \cdot a$$
$$c^2 = 12a^2$$

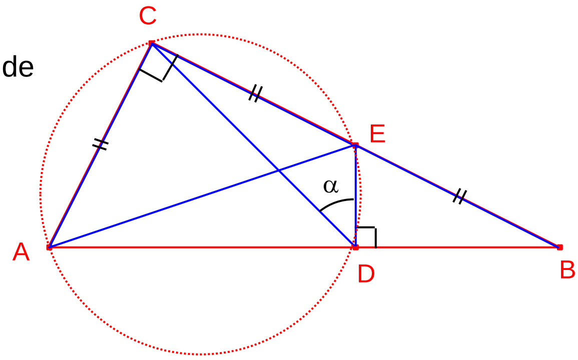
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{3 \cdot S_{DEH}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

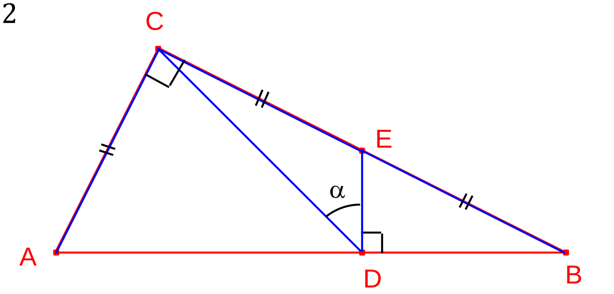
4567.- La figura està formada per un triangle rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle



Solució 1:
El quadrilàter $ADEC$ és cíclic ja que dos angles oposats de 90º (suplementaris)
$\alpha = \angle CDE = \angle CAE = 45°$

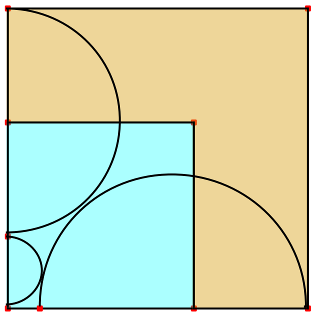


Solució 2:
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{AC} = 1, \overline{BC} = 2$
$\overline{AB} = \sqrt{5}$
Siga $\beta = \angle ABC$
$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EDB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{DE} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

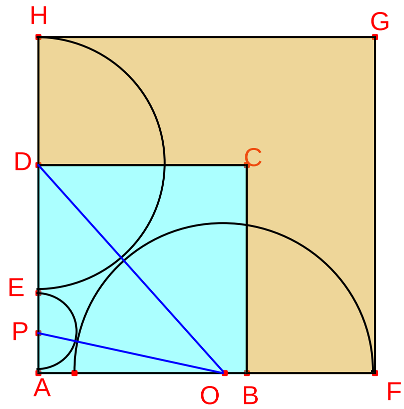


Siga $\overline{CD} = y$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$y^2 = \frac{1}{5} + 1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1 \cdot \sin\beta = \frac{8}{5}$
$y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sin\alpha}$
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\alpha = 45°$

4568.- La figura està formada per dos quadrats i tres semicercles tangents
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
siga el quadrat $AFGH$ de costat $\overline{AF} = 1 + r$
Siga la semicircumferència de centre D i radi $\overline{DH} = \overline{DE} = r$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PE} = \frac{1-r}{2}$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OF} = x$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OAP}, \overset{\Delta}{OAD}$:

$$\left(x + \frac{1-r}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{2}\right)^2 = (x+r)^2 - 1$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1-r^2}{3r-1}$$

$$\overline{OA} = 1 + r - x$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{OAD}$:

$$\left(\frac{1-r^2}{3r-1} + r\right)^2 = 1 + \left(1 + r - \frac{1-r^2}{3r-1}\right)^2$$

Simplificant:

$$3r^4 + 5r^3 - 2r^2 - 3r + 1 = 0$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

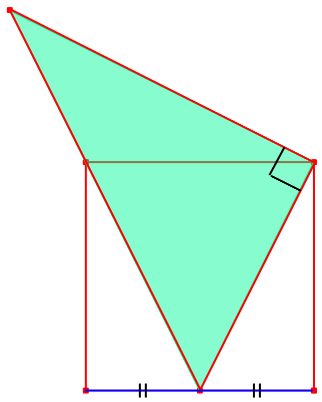
L'àrea groga és:

$$S_{groga} = (1-r)^2 - 1 = \Phi$$

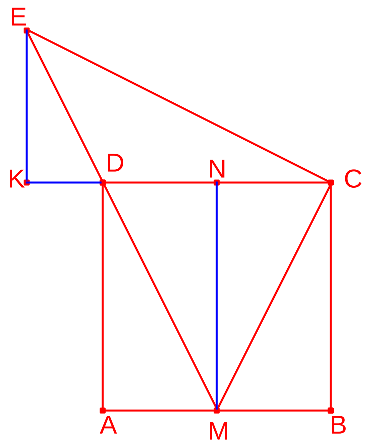
La proporció entre l'àrea groga i la blava és:

$$\frac{S_{BCDHGF}}{S_{ABCD}} = \Phi$$

4569.- La figura està formada per un quadrat d'àrea 36
i un triangle rectangle.
Calculeu l'àrea del triangle rectangle.



Solució:



BC=6, MB=3

angleMCB=angleDCE=angleKED

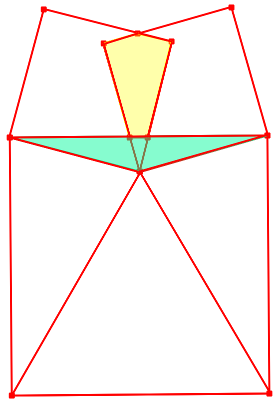
EK=x, KD=x/2
CD=2·EK

6+x/2=2x

x=4

[MCE]=(1/2)·CD·(MN+EK)=(1/2)·6(6+4)=30

4570.- La figura està formada per tres quadrats i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea verda

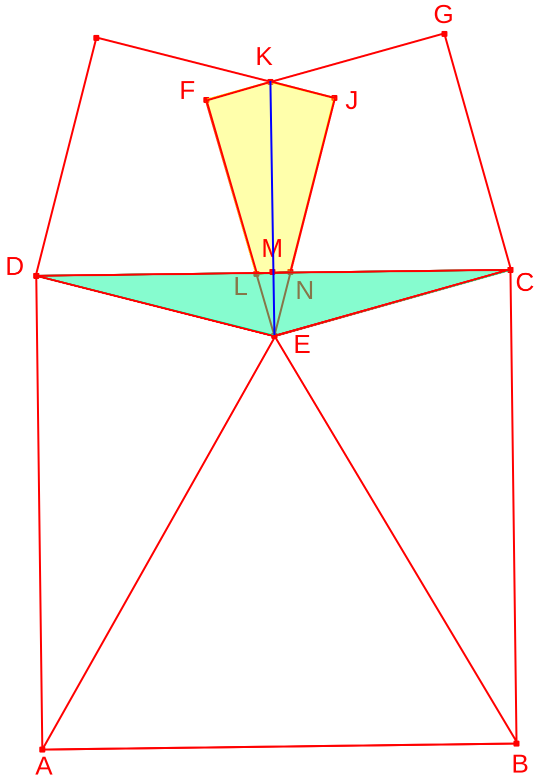


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = c$
$\angle ECD = 15°, \angle CED = 150°$
$\angle NEC = 30°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$$\overline{ME} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}}$$

L'àrea del triangle verd és:

$$S_{CDE} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}}$$



Els triangles $\overset{\Delta}{EFK}, \overset{\Delta}{DME}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{ME}} = \frac{2c}{1} = \frac{\overline{KE}}{c}$$

$$\overline{KE} = 2c^2, \overline{FK} = 2c\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ENL}, \overset{\Delta}{DME}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{LN}}{2 \cdot \overline{FK}} = \frac{\overline{ME}}{c}$$

$$\overline{LN} = \frac{2 \cdot \overline{FK} \cdot \overline{ME}}{c} = 2\left(c^2 - \frac{1}{4}\right)$$

L'àrea groga és:

$$S_{NJKFL} = 2 \cdot S_{EFK} - S_{ELN} = 2 \cdot \frac{1}{2} 2c\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}} \cdot c - \frac{1}{2} 2\left(c^2 - \frac{1}{4}\right)\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{NJKFL}}{S_{CDE}} = 1$$