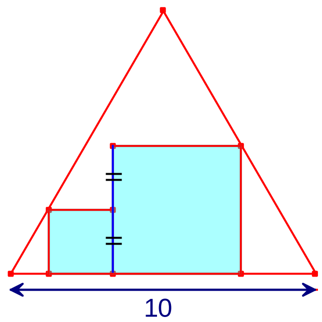
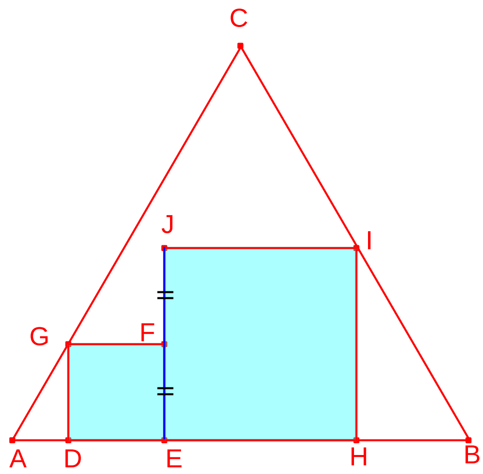
Problemes de Geometria per a l'ESO 458

4571.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 10 i dos quadrats.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

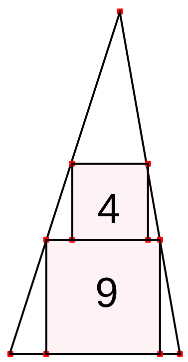
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = a$
Siga el quadrat $EHIJ$ de costat $\overline{EH} = 2a$



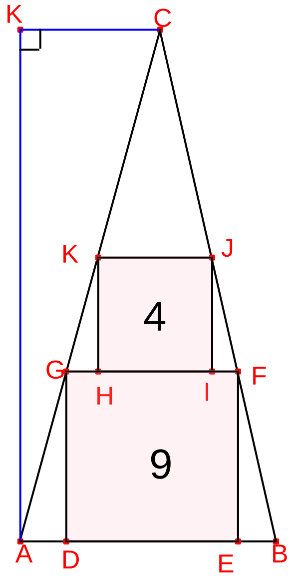
$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \overline{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\overline{AB} = (3+\sqrt{3})a = 10$
$a = \frac{5}{3}(3-\sqrt{3})$

L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 3 \cdot a^2 = 50(2-\sqrt{3})$

4572.- La figura està formada per un triangle que conté dos quadrats d’àrees 4, 9.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del triangle.



Solució:



DE=3, HI=2
AB=a, AK=h

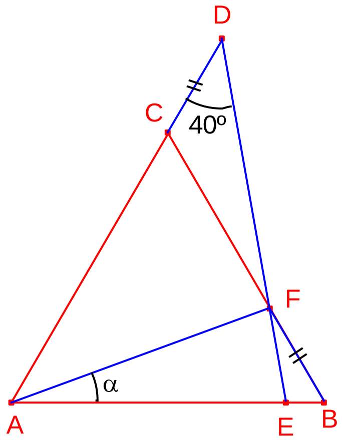
els triangles ABC, GFC, KJC són semblants

Teorema Tales
a/h = 3/(h-3) =2/(h-5)
a=9/2, h=9

[rosa]=13
[ABC]=(1/2)·9·(9/2)=81/4

[rosa]/[ABC]=52/81

4573.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter,
$\overline{BF} = \overline{CD}, \angle ADE = 40°$
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha = \angle FAB$



Solució:
Siga $\overline{AB} = 1, \overline{BF} = \overline{CD} = a$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$\frac{1}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDF}$:

$$\frac{1 - a}{\sin 40°} = \frac{a}{\sin 20°} = \frac{1}{\sin 40° + \sin 20°}$$

Dividint ambdues expressions:

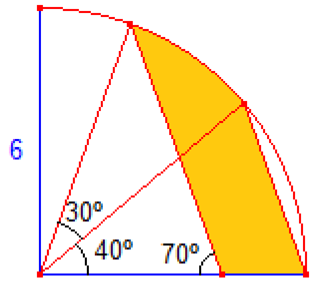
$$\frac{\sin(60° + \alpha)}{\sin 40° + \sin 20°} = \frac{\sin \alpha}{\sin 20°}$$

$$\frac{\sin(60° + \alpha)}{\sin 80°} = \frac{\sin \alpha}{\sin 20°}$$

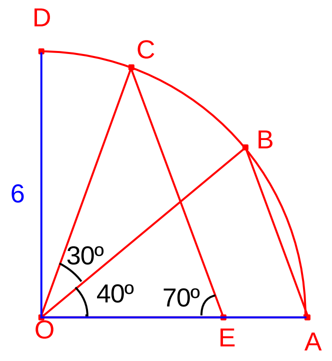
$$\sin(60° + \alpha) \cdot \sin 20° = \sin \alpha \cdot \sin 80°$$
$$\cos(40° + \alpha) - \cos(80° + \alpha) = \cos(80° - \alpha) - \cos\,(80° + \alpha)$$

$$\cos(40° + \alpha) = \cos(80° - \alpha)$$
$$40° + \alpha = 80° - \alpha$$
$$\alpha = 20°$$

4574.- La figura està formada per un quadrant de radi 6. Calculeu l'àrea de la regió ombrejada



Solució:



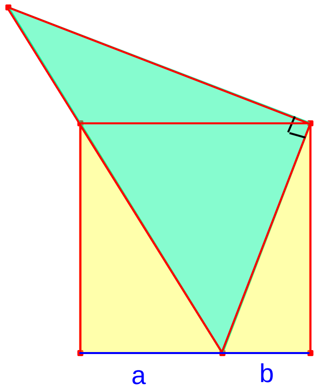
Siga el quadrat de centre O i radi $\overline{OA} = 6$

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OCE}$ són iguals.

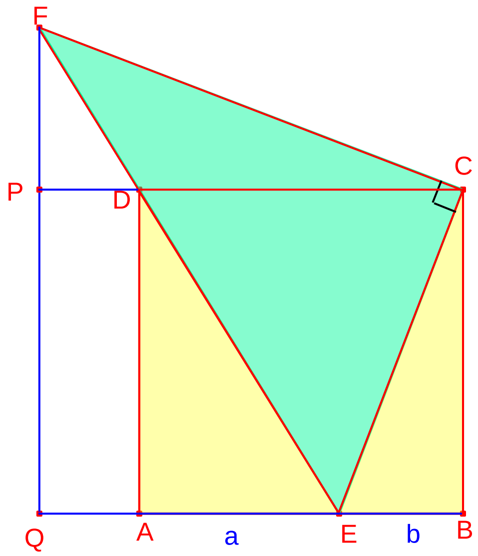
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del sector de 70º i radi 6 menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCE}$ menys l'àrea del segment circular de 40º i radi 6.

$$S_{ombrejada} = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{70°}{360°} - S_{OCE} - \left(\pi \cdot 6^2 \cdot \frac{40°}{360°} - S_{OCE}\right) = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{30°}{360°} = 3\pi$$

4575.- La figura està formada per un quadrat i un triangle rectangle.
La proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga és $V : G = 3 : 2$
Calculeu la proporció $a : b$



Solució:



[Groga]=(a+b)²/2

d=PF, c=PD

angleDCF=angleECB

d(a+b+c)=b(a+b)

FPD, DAE semblants

teorema Tales

d/c=(a+b)/a

d=b(a+b)²/(a²+b²+ab)

[Verda]=(1/2)(a+b)(a+b+d)

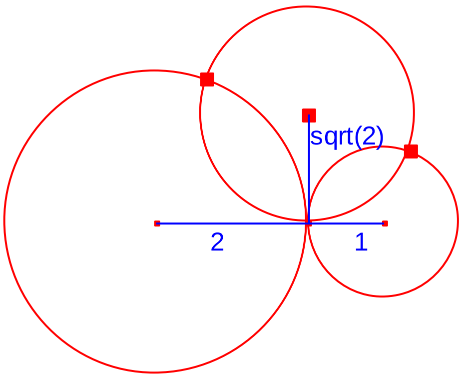
[Verda]/[Groga]=3/2

(a+b)(a+b+d)/(a+b)²=3/2

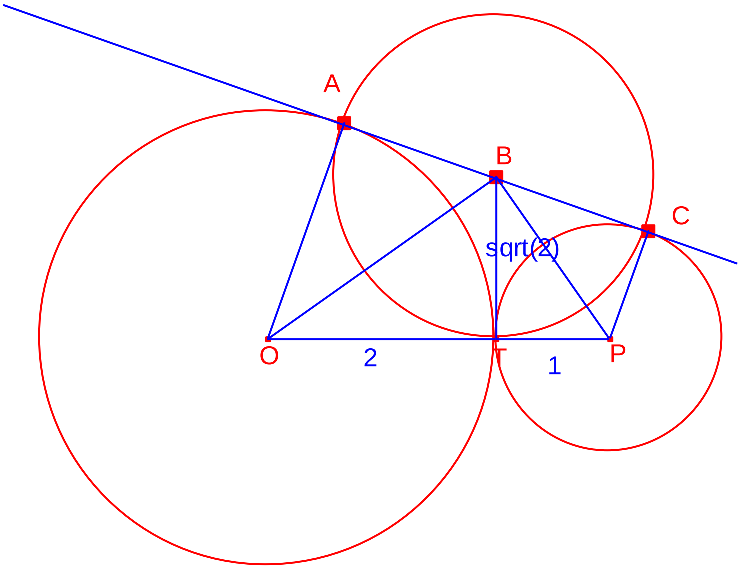
a²-ab-b²=0

a/b = Φ

4576.- Dues circumferències tangents i una tercera circumferència que toquen el segment que connecta els seus centres en el punt de tangència. Demostreu que els punts vermells (centre i dos punts d'intersecció) són col·lineals.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = 2$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PC} = 1$
T punt de tangència d'ambdues circumferències.
Siga la circumferència de centre B i radi $\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{BT} = \sqrt{2}$
T punt de tangència de la circumferència i el segment $\overline{OP}$.

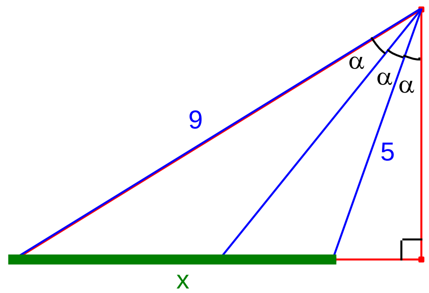
$\angle OTB = 90°$

Els triangles rectangles $O\overset{\Delta}{A}B, O\overset{\Delta}{T}B$ són iguals.
$\angle OBA = \angle OBT$

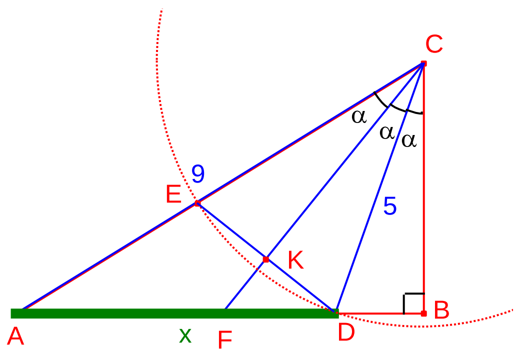
Els triangles rectangles $O\overset{\Delta}{A}B, O\overset{\Delta}{T}B$ són iguals.
$\angle PBC = \angle PBT$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $O\overset{\Delta}{T}B, P\overset{\Delta}{T}B$:
$\overline{OB} = \sqrt{6}, \overline{PB} = \sqrt{3}$
$\overline{OB}^2 + PB^2 = OP^2$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:
$\angle OBP = 90°$
Els angles $\angle OBT,\ \angle PBT$ són complementaris.
Els angles $\angle ABT,\ \angle CBT$ són suplementaris.
Aleshores, A, B, C estan alineats.

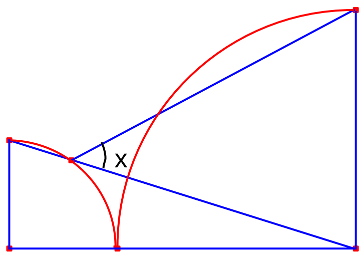
4577.- La figura està formada per un triangle rectangle d'hipotenusa 9.
Un angle agut del triangle s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu la mesura del segment x



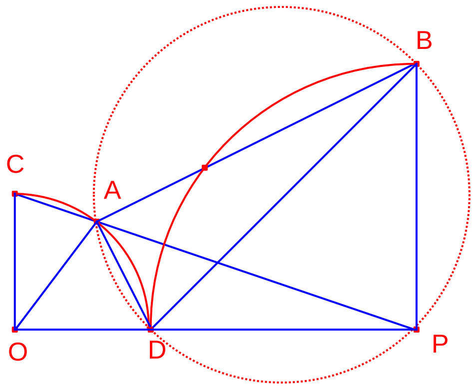
Solució:
Siga el triangle rectangle $ABC, B = 90°, \overline{AC} = 9$
Siga E el punt de la hipotenusa tal que $\overline{CE} = \overline{CD} = 5$.
Siga K la intersecció de $\overline{CF}, \overline{DE}$
$\angle EKC = 90°$
$\angle ADC = 90 + \alpha, \angle KDC = 90° - \alpha$
$\angle ADE = 2\alpha$
Els triangles, $A\overset{\Delta}{D}C, A\overset{\Delta}{E}D$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$
Resolent l'equació:
$x = 6$



4578.- La figura està formada per dos quadrants.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleOPC=a

angleAOD=90º-2a

angleOAC=angleODA=45º+a

anglePDA=135º-a

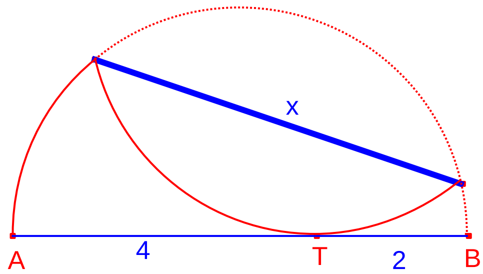
angleDAP=45º

angleDBP=45º

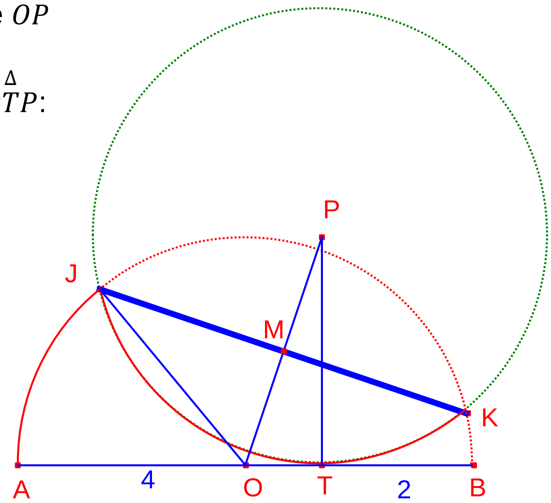
DPBA cíclic

anglePAB=angleBDP=45º

4579.- Una semicircumferència es doblega pel segment x i el arc resultant és tangent al diàmetre, formant dos segments de longituds 4 i 2.
Calculeu la mesura del segment x

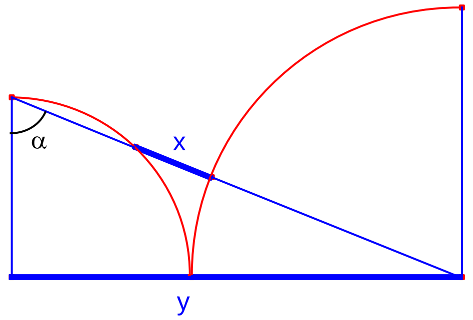


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 6$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 3$ tangent al diàmetre $\overline{AB}$.
El segment OP és perpendicular JK. JK és mediatriu de OP
$\overline{OT} = 1$

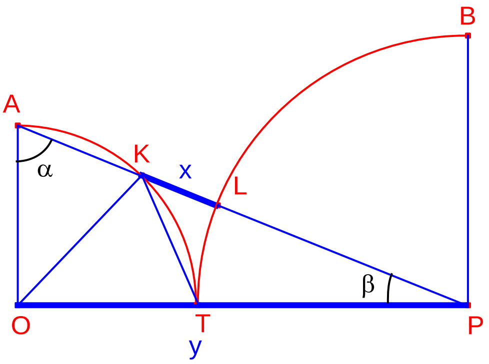


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{OP} = \sqrt{10}$
$\overline{JM} = \frac{x}{2}$
$\overline{OM} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMJ}$:
$9 = \frac{10}{4} + \frac{x^2}{4}$
Resolent l’equació:
$x = \sqrt{26}$

4580.- La figura està formada per dos quadrants.
Si $\frac{x}{y}$ és màxim, calculeu $\sin\alpha$



Solució:
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PB} = 1$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = y - 1$



Siga $\angle OPA = \beta = 90° - \alpha$
$\angle KOT = 90° - 2\beta$
$\angle OKT = \angle OTK = 45° + \beta$
$\angle KTP = 135° - \alpha$
$\angle DAP = 45°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KTP}$:

$$\frac{1}{\sin 45°} = \frac{1+x}{\sin(45+\beta)}$$

$$x = \cos\beta + \sin\beta - 1$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{y-1}{\sin\beta} = \frac{1}{\cos\beta - \sin\beta}$$

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$$

$$f(\beta) = \frac{x}{y} = \frac{(\cos\beta + \sin\beta - 1)(\cos\beta - \sin\beta)}{\cos\beta}$$

$$f'(\beta) = \frac{-3\cos^2\beta \cdot \sin x - \sin^3\beta + 1}{\cos^2\beta}$$

$$f'(\beta) = 0$$

$$2 \cdot \sin^3\beta - 3 \cdot \sin\beta + 1 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \approx 0.9306048591$$