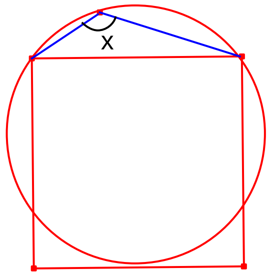
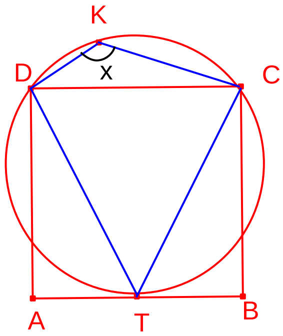
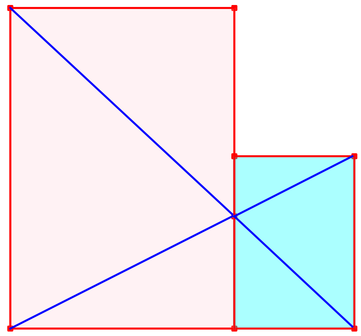
4581.- La figura està formada per un quadrat i una circumferència tangent a un costat i que passa per dos vèrtexs.
Calculeu la mesura de l'angle x



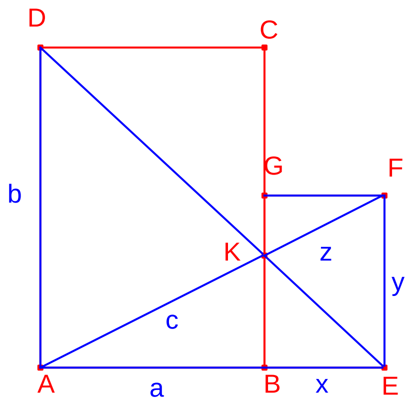
Solució:
Siga $\angle ADT = \alpha$
$\angle DTC = 2\alpha$
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$
$x = 180° - 2\alpha$
$\tan x = -\frac{4}{3}$
$x = \arctan\frac{-4}{3} \approx 126°\,52'12''$



4582.- Dos rectangles comparteixen un vèrtex. Dos segments que connecten vèrtexs oposats i el costat comú es tallen en un sol punt. Demostreu que els rectangles són semblants



Solució:



Els triangles AKD, FKE semblants.

$y/b = z/c$

Els triangles ABK, FGK semblants.

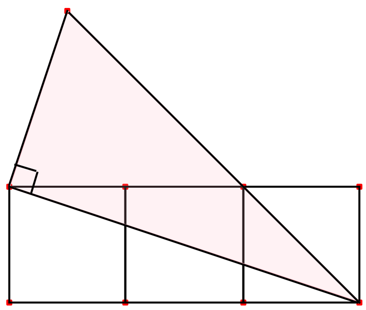
$x/a = z/c$

$(ya)/(bx)=1$

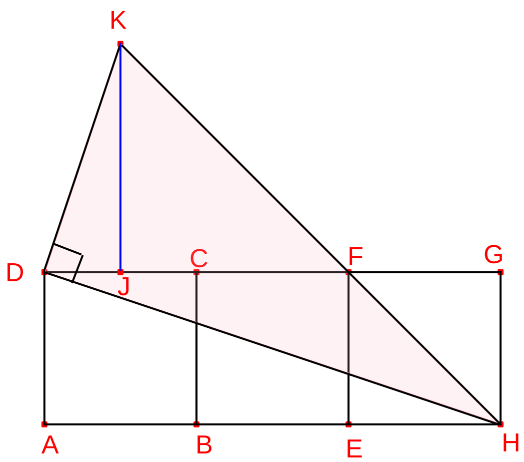
$b/a = y/x$

ABCD, BEFG són semblants

4583.- La figura està formada per tres quadrats, cadascun d'ells d'àrea 4 i un triangle rectangle. Calculeu l'àrea del triangle rectangle.



Solució:



AB=2

KJ=JF=h

DJ=4-h

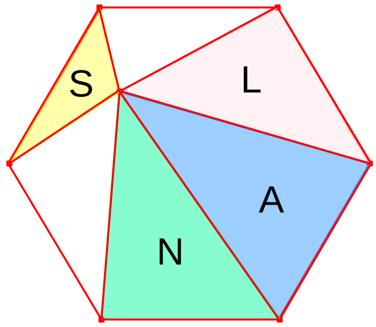
els triangles DAJ, DJK son semblants

(4-h)/h = 1/3

h=3

[KDH]=DF·(KJ+AD)/2=4·(3+2)/2=10

4584.- La figura està formada per un hexàgon regular des d'un punt interior s'han dibuixat quatre triangles d'àrees A, L, S, N.



Proveu que:

$$A = \frac{2L + 2N - S}{3}$$

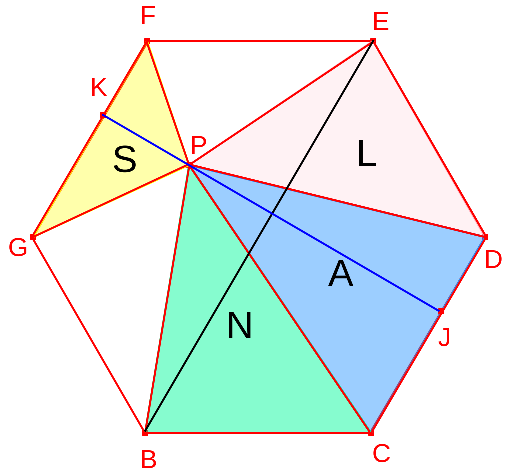
Solució:

Siga l'hexàgon regular $BCDEFG$ de costat $\overline{BC} = 1$

Siga T l'àrea de l'hexàgon $BCDEFG$.

$$T = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Siguen $\overline{PJ} = h_a, \overline{PK} = h_s$ altures dels triangles d'àrees A, S, respectivament.



$$\overline{JK} = \sqrt{3}, A = \frac{1}{2}h_a$$

$$A + S = \frac{1}{3}T$$

$$A = \frac{1}{3}T - S$$

$$s_{BEP} = (N + A + L) - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot 2\left(h_a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2N + 2A + 2L - T = 2 \cdot h_a - \sqrt{3}$$

$$2N + 2A + 2L - T = 4A - \frac{2}{3}T$$

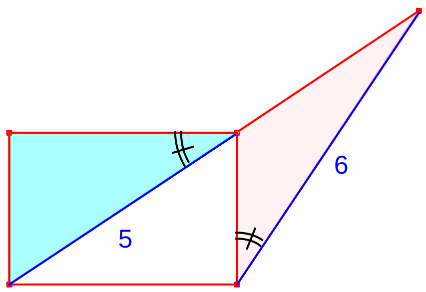
$$2N + 2N + A + \frac{1}{3}T - S - T = 4A - \frac{2}{3}T$$

$$2N + 2N + -S = 3A$$

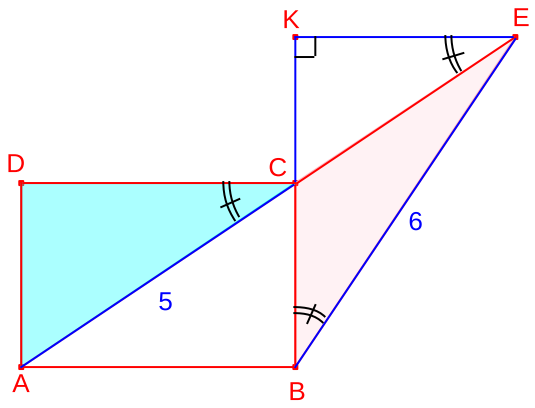
Aleshores:

$$A = \frac{2L + 2N - S}{3}$$

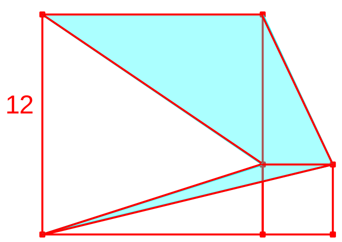
4585.- La figura està formada per un rectangle i un triangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.



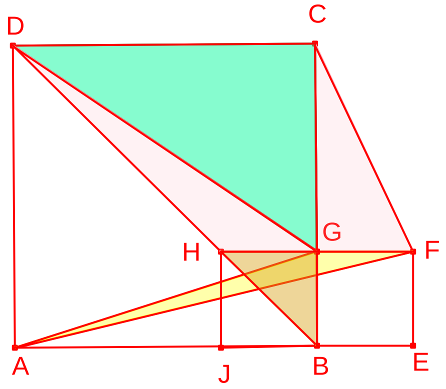
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AD}=a, \overline{AB}=b$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{EKB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KE}=\frac{6}{5}a, \overline{BK}=\frac{6}{5}b$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{CKE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CK}=\frac{6}{5}\frac{a^2}{b}$
$\overline{BC}=a=\frac{6}{5}b-\frac{6}{5}\frac{a^2}{b}$
Simplificant:
$6b^2-5ab-6a^2=0$
Resolent l'equació:
$b=\frac{3}{2}a$
$S_{BCE}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{6}{5}a=\frac{3}{5}a^2$
$S_{ADC}=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{3}{4}a^2$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{BCE}}{S_{ADC}}=\frac{4}{5}$



3586.- La figura està formada per dos quadrats el de l'esquerra de costat 12.
Calculeu l'àrea ombrejada.

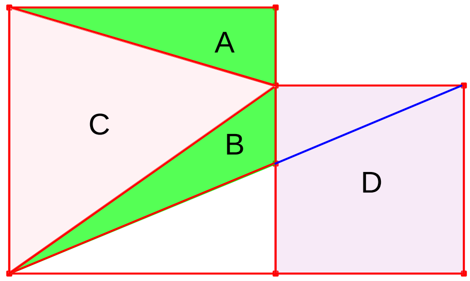


Solució:



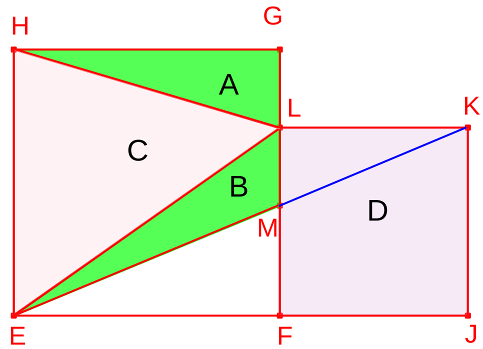
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 12$
Siga el quadrat $BEFG$.
Siga el quadrat $JBGH$.
$S_{GFC} = S_{HGD}$
$S_{GFA} = S_{HGB}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{DGAFCC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 72$

4587.- La figura està formada per dos quadrats
Si les àrees dels triangles A i B són iguals.
Calculeu la proporció entre el triangle d'àrea C i el quadrat d'àrea D.

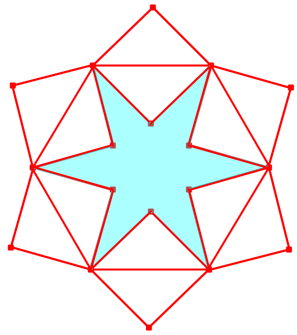


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, FJKL$
Siguen $\overline{GL} = \overline{LM} = a, \overline{FM} = c$
$\overline{FL} = \overline{FJ} = a + c$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EFM}, \overset{\Delta}{EJK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{a+c}{c} = \frac{3a+c}{2a+c}$$
Simplificant:
$c^2 = 2a^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{1}{2}(2a+c)^2}{(a+c)^2} = \frac{\frac{1}{2}(4a^2+4ac+c^2)}{a^2+2ac+c^2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = 1$$



4588.- La figura està formada per sis quadrats sobre els costats d'un hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrat $AGBH$ de costat $\overline{AG} = \sqrt{2}$
L'àrea total és igual a l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 més l'àrea de tres quadrats de costat $\sqrt{2}$:

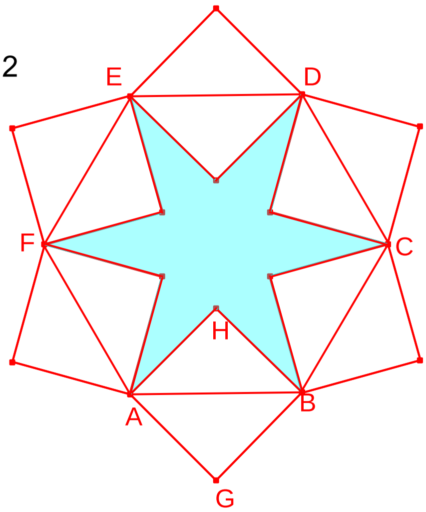
$$S_{Total} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}2^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6\sqrt{3} + 6$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 menys l'àrea de tres quadrats de costat $\sqrt{2}$:

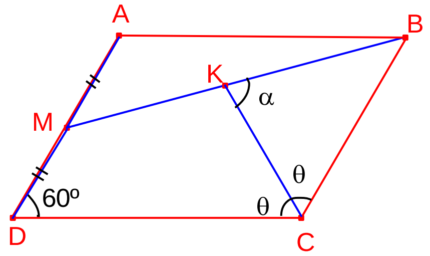
$$S_{Ombrejada} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}2^2 - 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6\sqrt{3} - 6$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{Ombrejada}}{S_{Total}} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{6\sqrt{3} + 6} = 2 - \sqrt{3}$$



4589.- En la figura $ABCD$ és un paral·lelogram $\overline{AB} = 1 + \sqrt{3}, \overline{BC} = 2$
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
$\overline{AM} = \overline{CM} = 1$
$\angle DCB = \angle DAB = 120°, \theta = 60°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DCM}$:
$\overline{CM}^2 = 1 + 4 + 2\sqrt{3} - \left(1 + \sqrt{3}\right) = 4 + \sqrt{3}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$\overline{BM}^2 = 1 + 4 + 2\sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right) = 6 + 3\sqrt{3}$

Siga $\beta = \angle MBC$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MCB}$:

$$4 + \sqrt{3} = 6 + 3\sqrt{3} + 4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

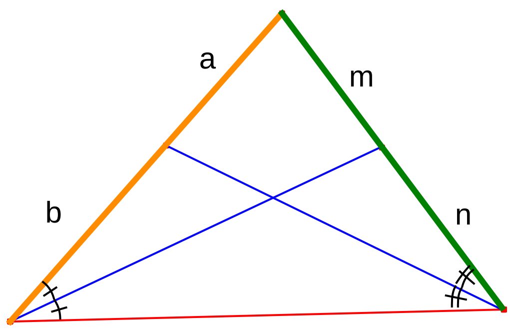
$\beta = 45°$
$\alpha = \angle BKC = 180° - (60° + 45°) = 75°$

4590.- En el triangle de la figura,

$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}, \frac{m}{n}=\frac{5}{6}$

Calculeu:

$\frac{a+b}{m+n}$



Solució:

Siga $\overline{KL}=x$

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\frac{a}{m+n}=\frac{b}{x}$

$\frac{m}{a+b}=\frac{n}{x}$

dividint les dues expressions:

$\frac{a}{m}\cdot\frac{a+b}{m+n}=\frac{b}{n}$

$\frac{a+b}{m+n}=\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{9}$