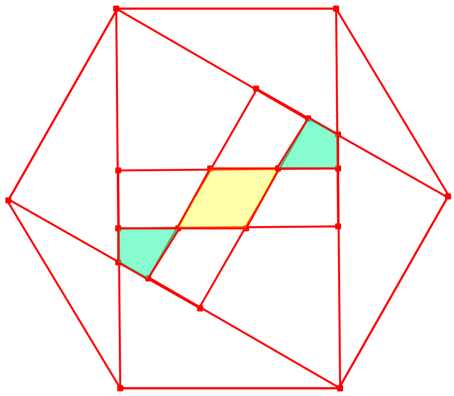
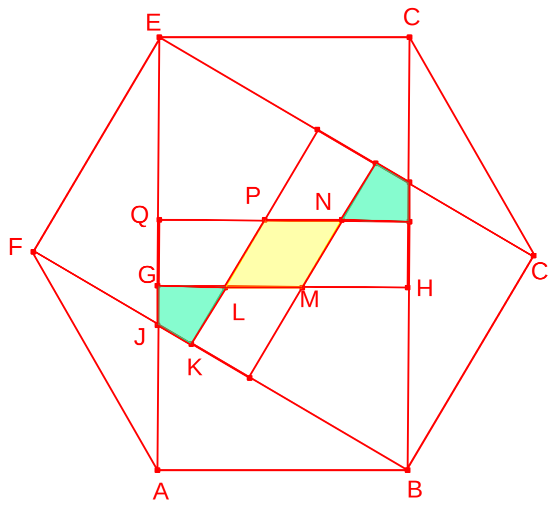
Problemes de Geometria per a l'ESO 462

4611.- La figura està formada per un hexàgon regular que conté quatre quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea verda.



Solució:



AB=2

EG=2

EJ=(4/3)sqrt(3)

GJ=EJ-2=(2/3)(2·sqrt(3)-3)

GL=GJ·sqrt(3)=2(2-sqrt(3))

[Verda]=2·GJ·GL=(8/3)·(-12+7·sqrt(3))

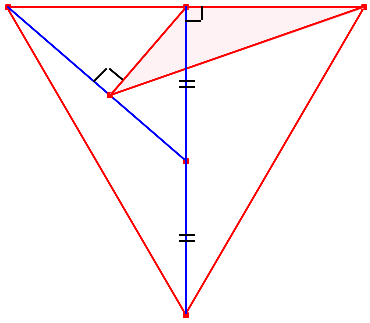
GQ=2(2-sqrt(3))

LM=(2/sqrt(3))GQ=(4/3)(-3+2·sqrt(3))

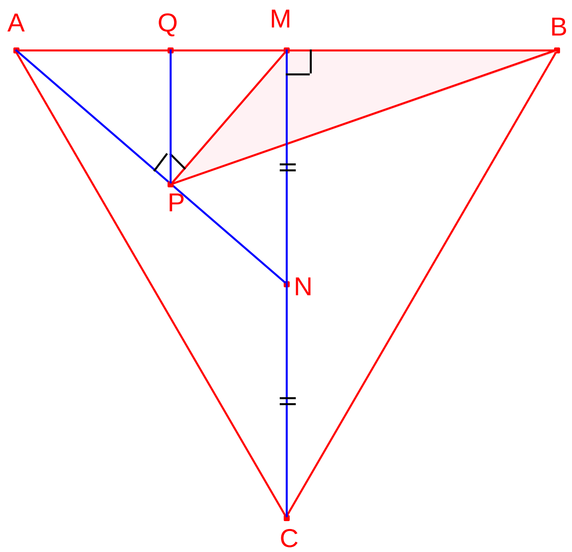
[Groga]=(sqrt(3)/2)·LM^2=(8/3)·(-12+7·sqrt(3))

[Groga]:[Verda]=1:1

4612.- La figura està formada per un triangle equilàter. Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:



AB=2

MN=sqrt(3)/2

AN=sqrt(7)/2

AP/1=1/AN

AP=2·sqrt(7)/7

PQ/AP=MN/AN

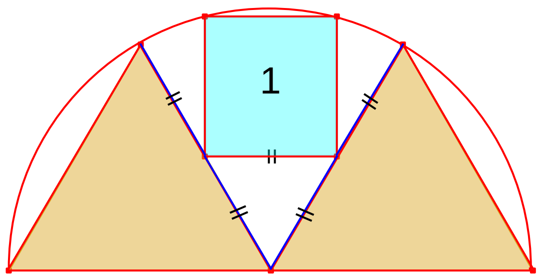
PQ=(2/7)sqrt(3)

[BMP]=(1/7)sqrt(3)

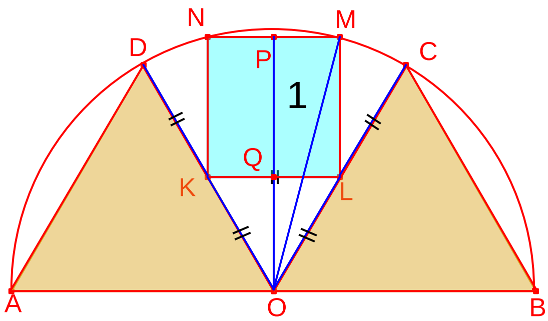
[ABC]=sqrt(3)

[BMP]/[ABC]=1/7

4613.- La figura està formada per una semicircumferència que conté dos triangles i un rectangle d'àrea 1.
Calculeu l'àrea de cadascun del dos triangles.



Solució:
Els dos triangles són iguals i equilàters.



OK=OL=KL=2a
KD=2a

LM=b
ab=1, b=1/(2a)

OQ=sqrt(3)·a

OP=1/(2a)+sqrt(3)·a
OM=4a, PM=a
Teorema Pitàgores OPM

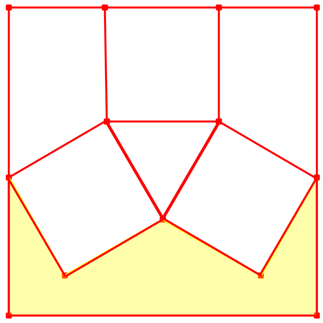
$16a^2=a^2+3a^2+1/(4a^2)+\text{sqrt}(3)$

$14a^2-\text{sqrt}\cdot a^2-1/4=0$

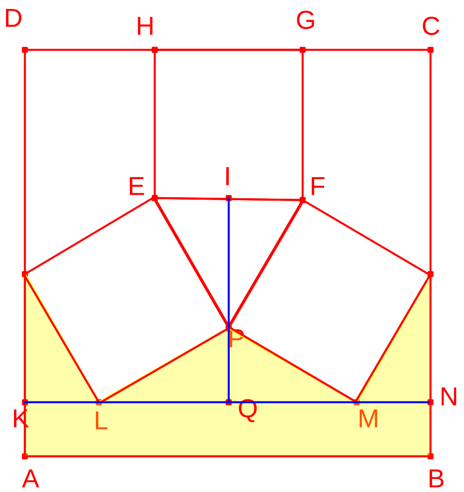
$a^2=\text{sqrt}(3)/12\cdot(1+\text{sqrt}(5))/2$

$[AOD]=4\cdot\text{sqrt}(3)\cdot a^2=\Phi$

4614.- La figura està formada per quatre quadrats i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea total de la figura.



Solució:



EF=1

IP=sqrt(3)/2

PQ=KL=MN=1/2

LM)sqrt(3)

AB=1+sqrt(3)

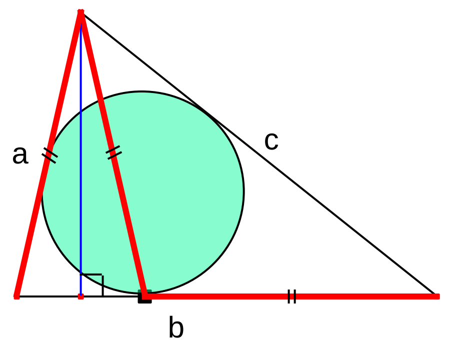
[ABCD]=(1+sqrt(3))²=2(2+sqrt(3))

MN=1+sqrt(3)-3/2-sqrt(3)/2=(1/2)(sqrt(3)-1)

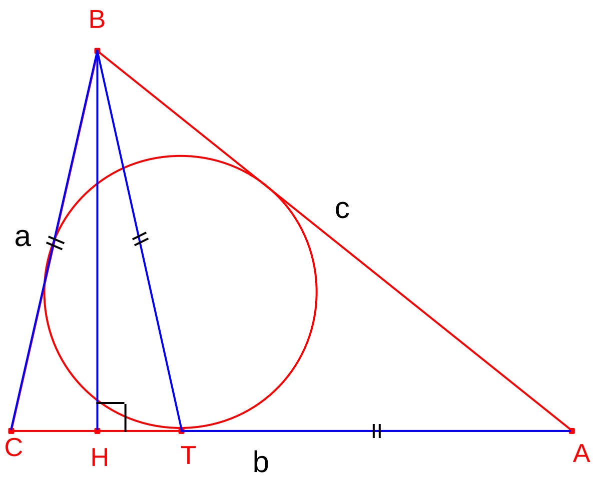
[Groga]=(1/2)(sqrt(3)-1)(1+sqrt(3)+sqrt(3)/2=(1/2)(2+sqrt(3))

[Groga]/[ABCD]=1/4

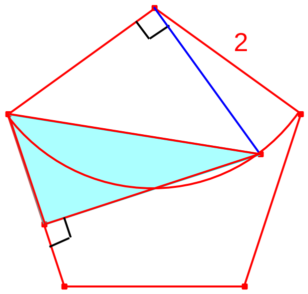
4615.- Un triangle que conté una altura i el cercle inscrit. Es mostra un punt de tangència. Hi ha tres segments iguals.
Calculeu la proporció dels costats del triangle
$a : b : c$



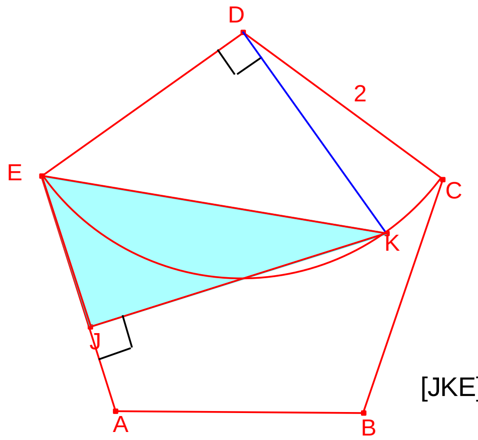
Solució:
$\overline{BT} = \overline{AT} = a$
$x = \overline{CH} = \overline{HT}$
$\overline{CT} = 2x = \dfrac{a + b - c}{2}$
$x = \dfrac{a + b - c}{4}$
$b = 2x + a = 3a - c$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{CHB}, \overset{\Delta}{BHA}$:
$a^2 - x^2 = c^2 - (x + a)^2$
Simplificant:
$2a^2 = c^2 - 2ax$
$x = \dfrac{c^2 - 2a^2}{2a}$
$\dfrac{a + b - c}{4} = \dfrac{c^2 - 2a^2}{2a}$
$\dfrac{a + 3a - c - c}{4} = \dfrac{c^2 - 2a^2}{2a}$
Simplificant:
$4a^2 - ac - c^2 = 0$
$a = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{8} c$
$b = \dfrac{-5 + 3\sqrt{17}}{8}$
$a : b : c = 1 + \sqrt{17} : -5 + 3\sqrt{17} : 8$



4616.- La figura està formada per un pentàgon regular de costat 2.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



EK=2·sqrt(2)

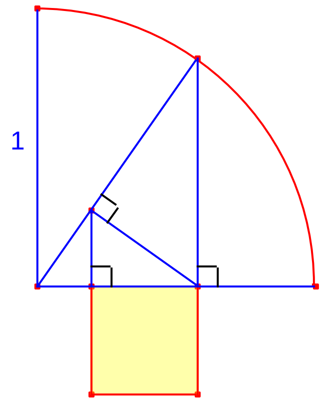
angleJKD=72º

angleJKE=27º

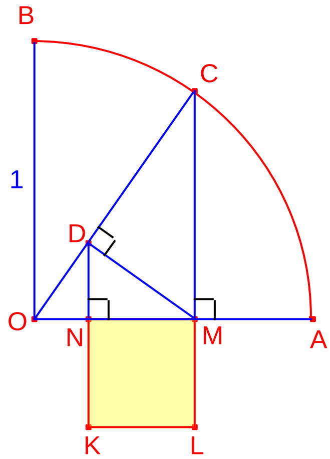
JK=2·sqrt(2)·cos 27º

[JKE]=(1/2)·2·sqrt(2)·2·sqrt(2)·cos 27·sin27º=2·cos36º= Φ

4617.- La figura està formada per un quadrant de radi 1 i un quadrat.
Calculeu l'àrea màxima del quadrat ombrejat.

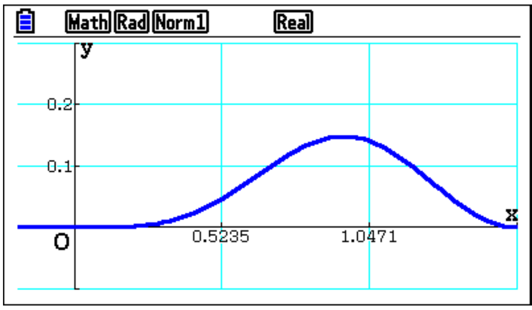


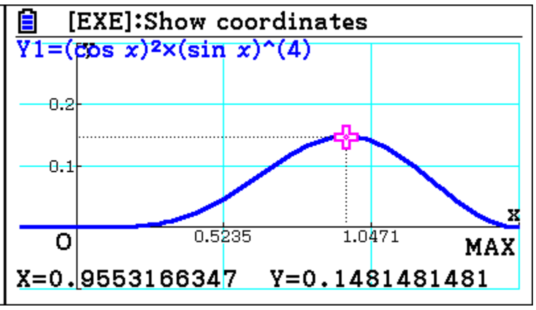
Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\alpha = \angle COA$



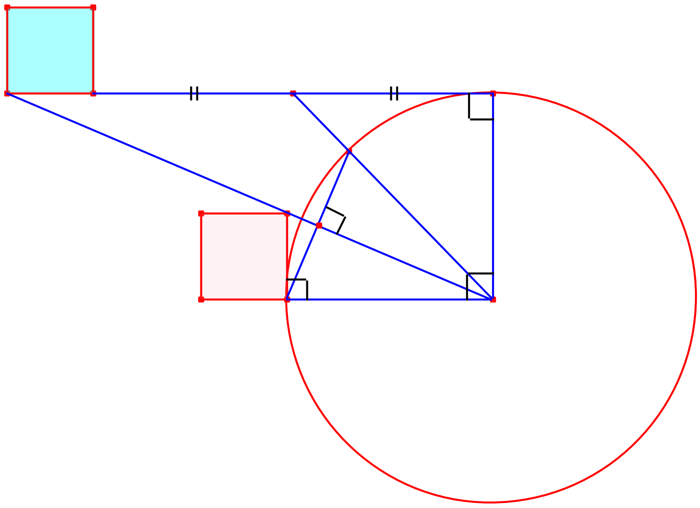
$\overline{CM} = \sin\alpha$
$\overline{DM} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\overline{MN} = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$
L'àrea del quadrat $KLMN$ és:
$f(\alpha) = \sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \sin^6\alpha$
$f'(\alpha) = 4 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - 6 \cdot \sin^5\alpha \cdot \cos\alpha$
$f'(\alpha) = 2 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha\,(2 - 3\sin^2\alpha)$
$f'(\alpha) = 0$
$\sin\alpha = 0, \cos\alpha = 0, \sin^2\alpha = \dfrac{2}{3}$
En els dos primers casos l'àrea del quadrat és zero.
$\sin^2\alpha = \dfrac{2}{3}, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}, \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$f''(\alpha) = 8 \cdot \sin\ \alpha \cdot \cos\ \alpha(-17 \cdot \cos^2\alpha\sin^2\alpha + 3 \cdot \cos^2\alpha + 7 \cdot \sin^2\alpha)$
$f''\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) < 0$
Quan $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$ l'àrea del quadrat és màxima.
L'àrea màxima és:
$$f\left(\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

Amb Casio CG50



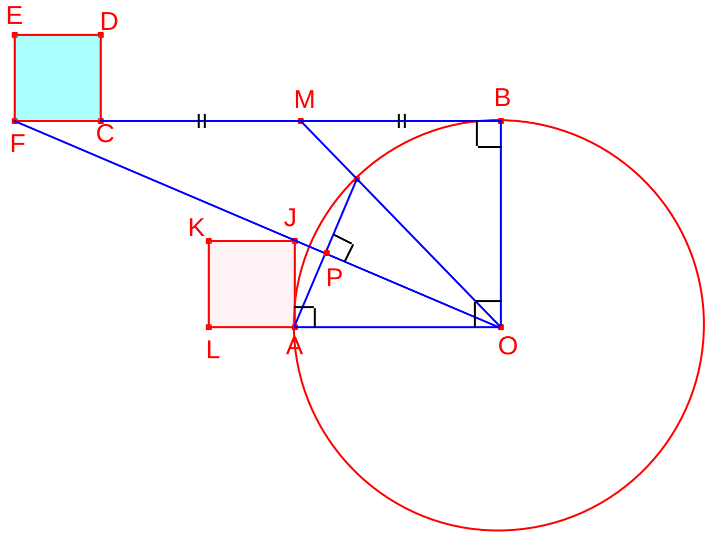


4618.- En la figura calculeu la proporció entres les àrees dels dos quadrats ombrejats



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga el quadrat $AJKL$ de costat $\overline{AJ} = c$
siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = d$

Siga $\alpha = \angle AOP = \alpha$
$\angle BFO = \alpha$
$\overline{OM} = \overline{FM}$
$\angle BMO = 2\alpha$



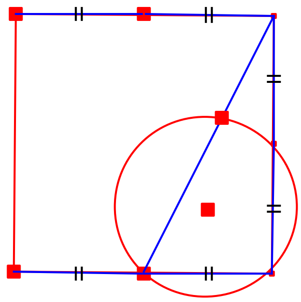
$c = \tan\alpha$

$\overline{OM} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$
$\overline{BM} = \overline{CM} = \dfrac{1}{\tan 2\alpha}$

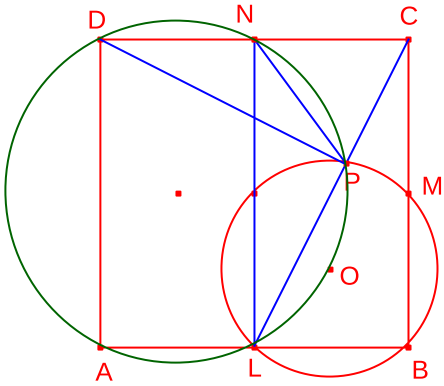
$\overline{FM} = d + \dfrac{1}{\tan 2\alpha}$
$\dfrac{1}{\sin 2\alpha} = d + \dfrac{1}{\tan 2\alpha}$
$d = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} - \dfrac{1}{\tan 2\alpha} = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \tan\alpha$
$c = d$

$\dfrac{S_{AJKL}}{S_{CDEF}} = 1$

4619.- La figura està formada per un quadrat, un cercle i el seu centre. Demostreu que els sis punts vermells estan en un cercle



Solució:



angleLCB=x

angleNLC=x

AB=2

CL=sqrt(5)

CP·CL=CM·CB

CP=2/sqrt(5

NP²=1+4/5-2·1·2/sqrt(5)·(1/sqrt(5))=1

NP=CN=DN

angleDPC=90º

angleCDP=x

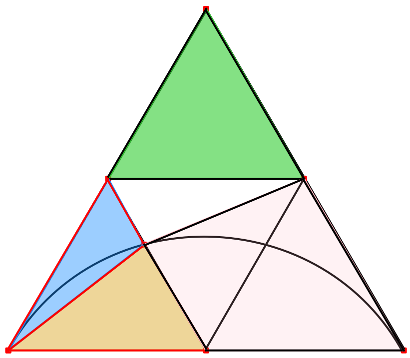
angleNDP=angleNLP=x

angleLOP=90º+2x

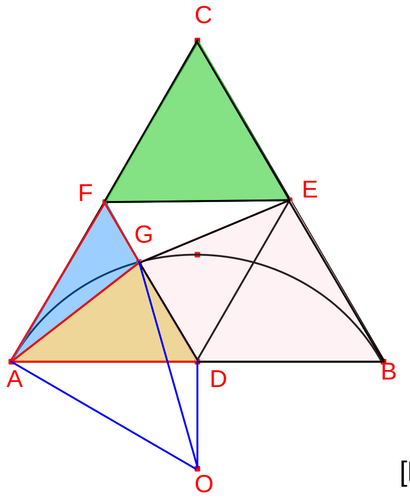
angleLNP=90º-2x

ALOPND cíclic

4620.- La figura està formada per triangles equilàters i un arc tangent a dos costats del triangle equilàter exterior. Calculeu la proporció entre les àrees:
$[Blava] : [Groga] : [Verda] : [Rosa]$



Solució:



AB=2
DG=a

OA=OG=2/sqrt(3)
OD=1/sqrt(3

Teorema cosinus GOD

4/3=a²+1/3+2·(1/sqrt(3))a·(sqrt(3)/2)
a=(-1+sqrt(5))/2= $1/\Phi$
FG=1-a=2- $\Phi=1/\Phi^2$
DG+BE= Φ

[Blava]:[Groga]:[Verda]:Rosa]=FG : DG : FE : (BE+DG]

[Blava]:[Groga]:[Verda]:Rosa]= $1/\Phi^2 : (1/\Phi) : 1 : \Phi$