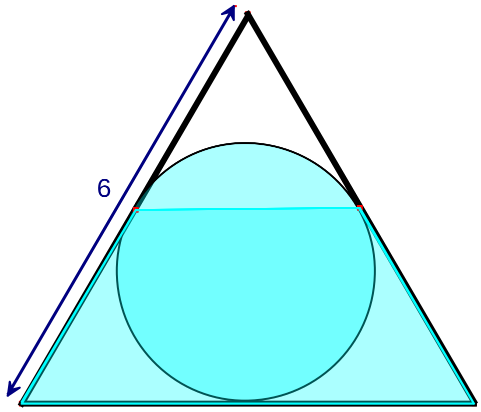
4621.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 6 i la seua circumferència inscrita.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

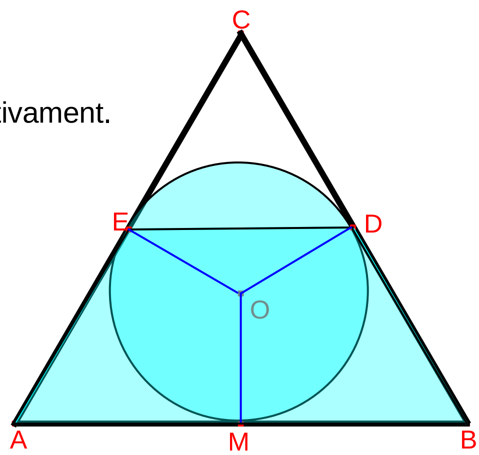
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 6$
Sigen D, E, M els punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, respectivament.
Siga O la circumferència inscrita al triangle.

$\overline{MC} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aplicant la propietat del baricentre:

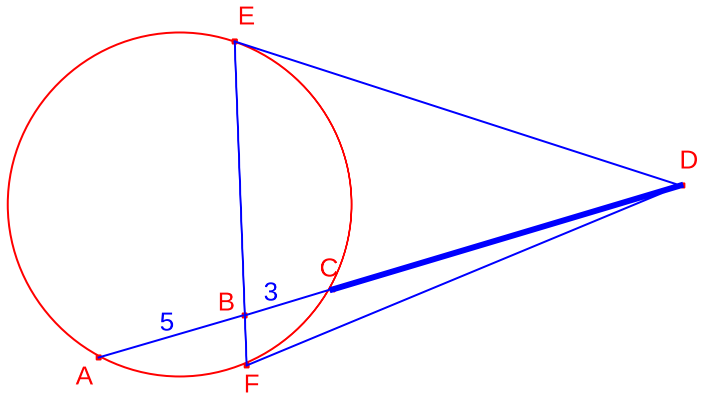
$\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MC} = \sqrt{e}$

La zona ombrejada és igual a l'àrea del trapezi $ABDE$ més l'àrea del segment circular de 120º i radi $\overline{OM} = \sqrt{3}$.

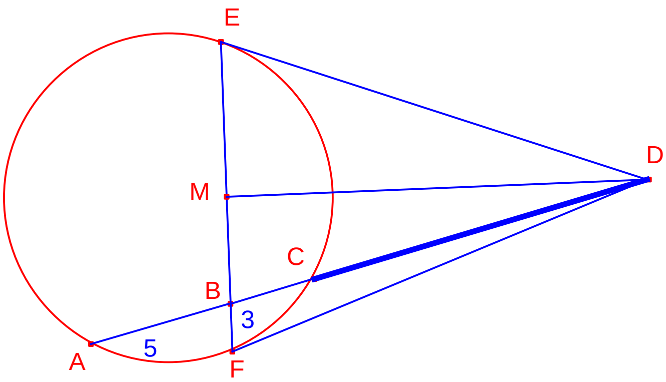


$$S_{ombrejada} = \frac{6+3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 = 6\sqrt{3} + \pi$$

4622.- En la figura $\overline{DE}, \overline{DF}$ són tangents a la circumferència.
$\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 3$
Calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$



Solució:



CD=a

BE=b, BF=c, DE=DF=d
bc=15

a(a+8)=d²

Teorema Pitàgores EMD, BMD

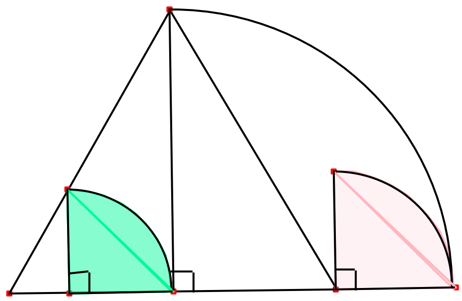
$d^2-((b+c)/2)^2=(a+3)^2-((b-c)/2)^2$

$d^2=a^2+6a+9+bc$

$a^2+8a=a^2+6a+9+15$

a=12

4623.- La figura està formada per un triangle rectangle i tres quadrants.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrants ombrejats.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costaty $\overline{AB} = 2$

$\overline{CM} = \overline{MD} = \sqrt{3}$

Siga el quadrant de centre B i radi $r = \overline{BD} = \sqrt{3} - 1$

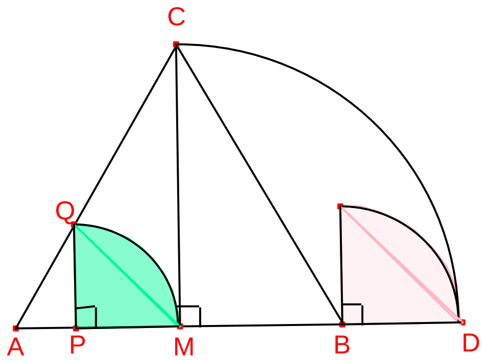
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PM} = s$

$$\overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{3}}s$$

$$1 = \overline{AM} = s + \frac{2}{\sqrt{3}}s$$

Resolent l'equació:

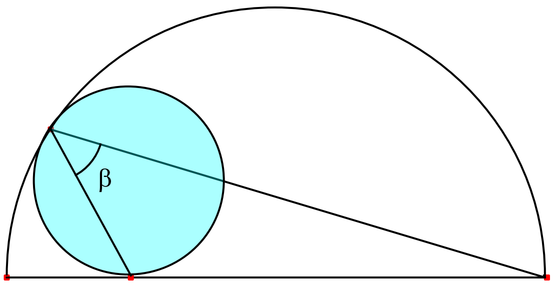
$$s = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$



La proporció entre les àrees dels dos quadrant ombrejats és:

$$\frac{S_P}{S_B} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

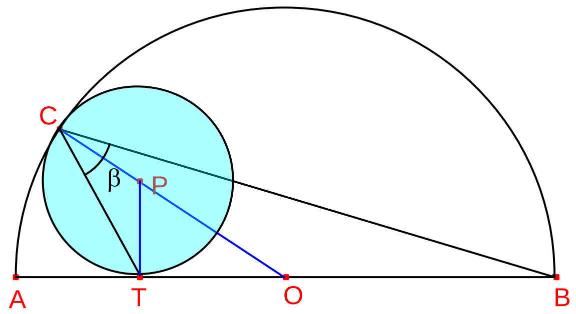
4624.- La figura està formada per una semicircumferència i una circumferència tangent al diàmetre i a la semicircumferència.
Calculeu la mesura de l'angle β



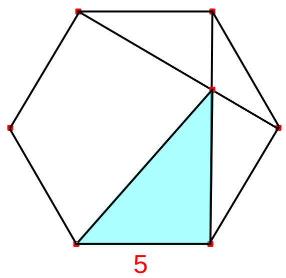
Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PC}$
siga $\alpha = \angle ABC = \angle OCB$
$\angle AOC = 2\alpha$

$\angle TCP = \angle TCP = \beta - \alpha$
$\angle TPO = 2(\beta - \alpha)$

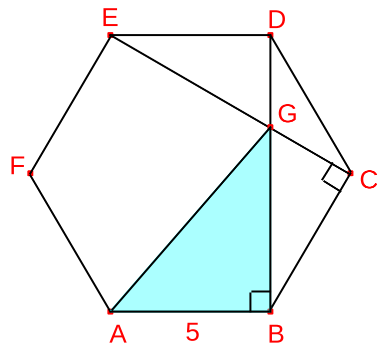
$2\beta = 90°$
$\beta = 45°$



4625.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 5 i dues diagonals.
Calculeu l’àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga l’hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 5$
$\angle ABD = \angle BCE = 90°$



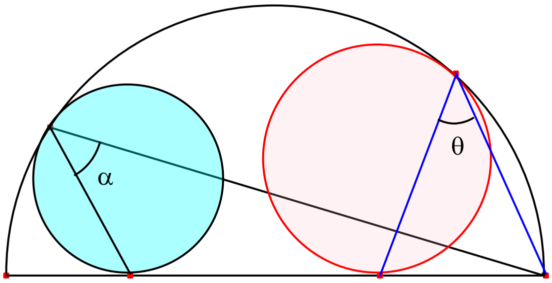
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCG}$

$$\overline{BG} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

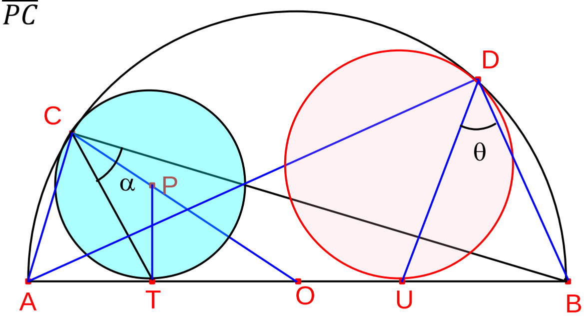
L’àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABG}$ és:

$$S_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

4626.- La figura està formada per una semicircumferència i dues circumferències tangents al diàmetre i a la semicircumferència.
Calculeu $\alpha + \theta$



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PC}$
siga $\beta = \angle ABC = \angle OCB$
$\angle AOC = 2\beta$



$\angle TCP = \angle TCP = \alpha - \beta$
$\angle TPO = 2(\alpha - \beta)$

$2\alpha = 90°$
$\alpha = 45°$

Anàlogament
$\angle ADU = 45°$
$\angle ADB = 90°$
$\theta = 90° - 45° = 45°$

$\alpha + \theta = 90°$

4627.- Les solució de l'equació $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 14x - 4\sqrt{5} = 0$, a, b, c són els costats d'un triangle.
Calculeu la seua àrea.

Solució 1:
Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} abc = 4\sqrt{5} \\ ab + bc + ca = 14 \\ a + b + c = -3\sqrt{5} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{-(a^4+b^4+c^4) + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}{4}$$

$$45 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 17$$

$$196 = (ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 76$$

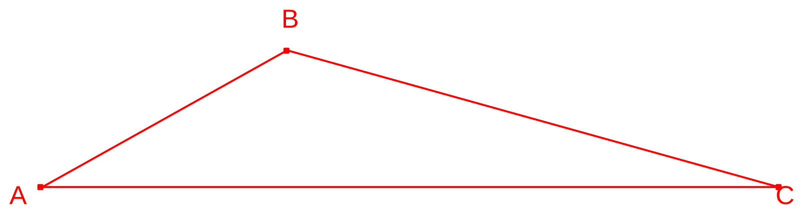
$$289 = (a^2+b^2+c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = 137$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{-(a^4+b^4+c^4) + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}{4} = \frac{\sqrt{-137+152}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

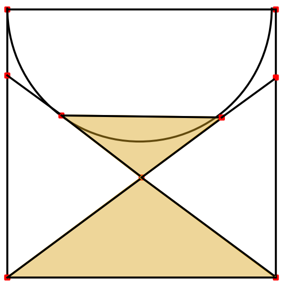
Solució:
Resolent l'equació $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 14x - 4\sqrt{5} = 0$
$x = \sqrt{5}, \sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1$

Siguen els costats del triangle a= $\sqrt{5}, b = \sqrt{5}+1, c = \sqrt{5}-1$
Aplicant la fórmula d'Heró de l'àrea:

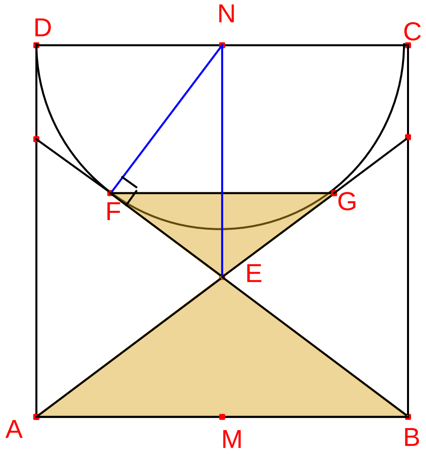
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



4628.- La figura està formada per un quadrat, una semicircumferència sobre un costat i dos segments tangents a la semicircumferència traçats des de dos vèrtexs.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:



AB=2

AG=AB=2

EF=EG=x

AE=2-x

ME=sqrt(x²-4x+3)

NE=2-ME

$1+x^2=(2-ME)^2$

x=3/4

AE=5/4

ME=3/4

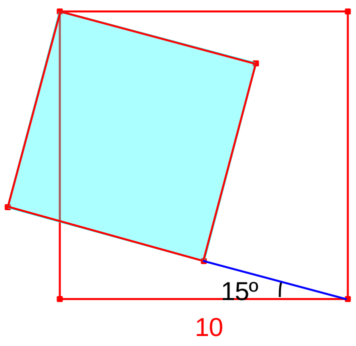
[ABE]=(1/2)2·(3/4)=3/4

ABE, FGE semblants raó 5 : 3

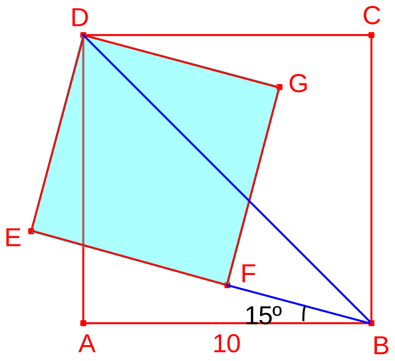
[Yelow]=[ABE]·(1+9/25)=51/25

[Yelow]/ABCD= 51/200

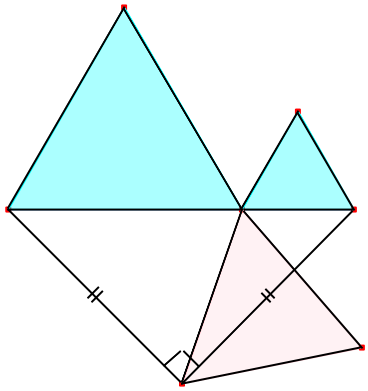
4629.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i una altre quadrat ombrejat.
Calculeu la seua àrea.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
$\overline{BD} = 10\sqrt{2}$
siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = c$
$\angle EBD = 30°$
$\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$
$c = 5\sqrt{2}$
L'àrea del quadrat ombrejat és:
$S_{DEFG} = c^2 = 50$



4630.- Els triangle ombrejats són equilàter.
Calculeu la proporció entre l’àrea rosa i l’àrea blava.



Solució:

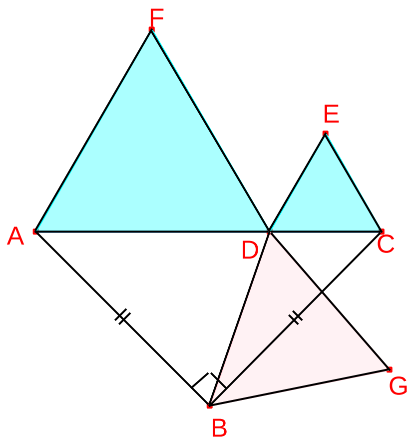
Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{BC} = 1, \overline{AC} = \sqrt{2}$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{CD} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADF}$ de costat $\overline{AD} = \sqrt{2} - c$

L’àrea blava és:

$$S_{Blava} = S_{CDE} + S_{ADF} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2} - c\right)^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2c^2 - 2c\sqrt{2} + 2\right)$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{BD}^2 = 1 + c^2 - 2 \cdot 1 \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = c^2 - c\sqrt{2} + 1$$

L’àrea del triangle rosa és:

$$S_{Rosa} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot BD^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(c^2 - c\sqrt{2} + 1\right)$$

La proporció d’àrees és:

$$\frac{S_{Rosa}}{S_{Blava}} == \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(c^2 - c\sqrt{2} + 1\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2c^2 - 2c\sqrt{2} + 2\right)} = \frac{1}{2}$$