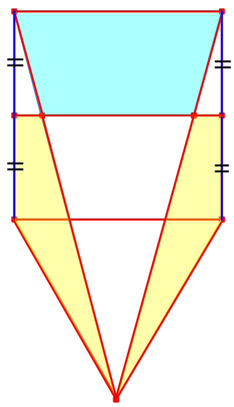
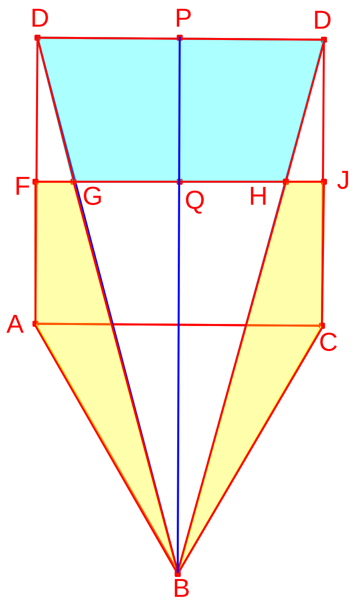
## Problemes de Geometria per a l'ESO 464



4631.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter que comparteixen un costat. Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.

Solució:




AB=2

PB=2+sqrt(3)

QB=1+sqrt(3

GH=a

a/2=(1+sqrt(3))/(2+sqrt(3)

a=-1+sqrt(3

[Blava]=(2-1+sqrt(3))/2·1=(1+sqrt(3))/2

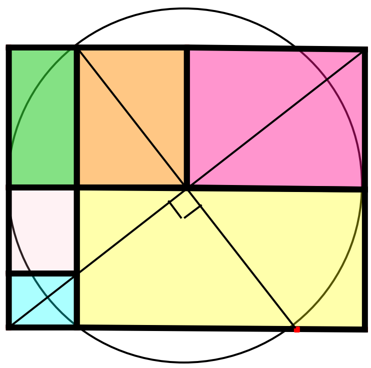
[ABD]=(1/2)2·2(1/2)=1

2·[FGD]=(1/2)(2-a)·1=(1/2)(3-sqrt(3))

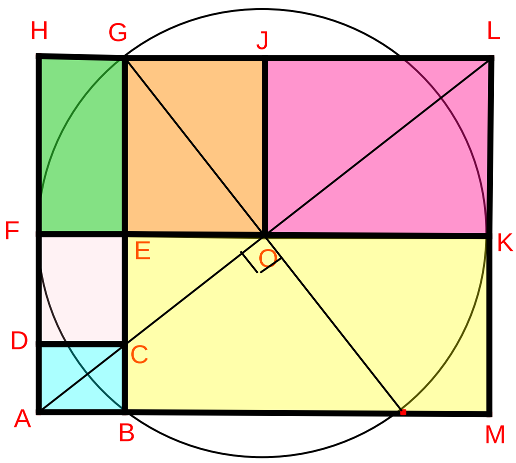
[Groga]=2[ABD]-2[FGD]=(1+sqrt(3))/2

[Blava]/[Groga]=1

4632.- En la figura calculeu la proporció entre les àrees:
$[Blava] : [Rosa] : [Verda] : [Taronja] : [Lila] : [Groga]$



Solució:
Siguen $\overline{AB} = 1, \overline{AD} = a, \overline{DF} = b, \overline{OF} = \overline{OK} = r$
$\overline{FH} = \overline{AF} = a + b$

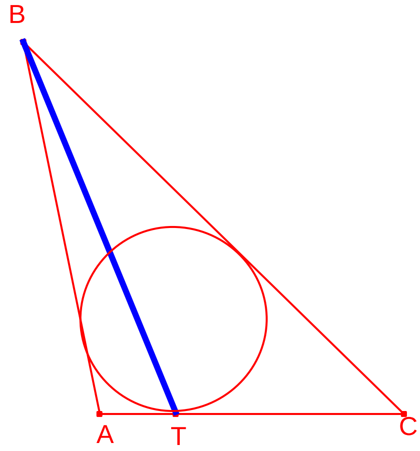



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{GEO}, \overset{\Delta}{OEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{a}{1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (a+b)^2}} = \frac{b}{r-1}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GEO}$:
$$r^2 = (a+b)^2 + (r-1)^2$$
$$(a+b)^2 = 2r - 1$$
$$a = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 2r - 1}}, b = \frac{r(r-1)}{\sqrt{r^2 + 2r - 1}}$$
$$(a+b)^2 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 2r - 1}} = 2r - 1$$
$$r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 4r - 1 = 0$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi^2$$
$[Verda] : [Taronja] : [Lila] : Groga = \overline{FE} : \overline{FO} : \overline{OK} = \overline{EK} = 1 : r - 1 : r : r + 1 =$
$= 1 : \Phi : \Phi^2 : \Phi^3$

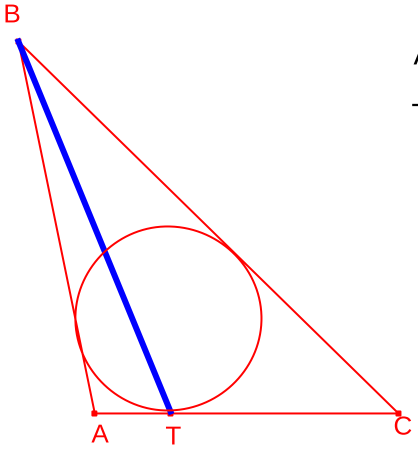
$$\frac{b}{a} = \frac{r(r-1)}{r} = \Phi$$
$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = \Phi^2$$
$[Blava] : [Rosa] : [Verda] = a : b : a + b = 1 : \Phi : \Phi^2$

$[Blava] : [Rosa] : [Verda] : [Taronja] : [Lila] : [Groga] = 1 : \Phi : \Phi^2 : \Phi^3 : \Phi^4 : \Phi^5$

4633.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 5, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 7$
Siga $T$ el punt de tangència de la circumferència inscrita
i el costat $\overline{AC}$
Calculeu la mesura del segment $\overline{BT}$




Solució:




AT=(5+4-7)/2=1

Teorema cosinus ABC

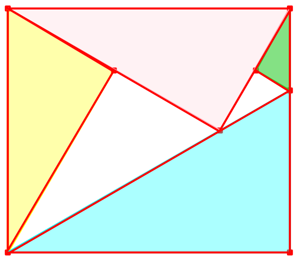
49=25+16-2·5·4· cos A
cos A = -1/5

Teorema Cosinus ABT

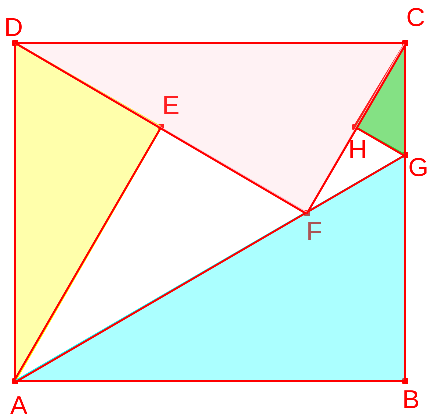
$BT^2$=25+1-2·5·1·(-1/5)=28

BT=2·sqrt(7)

4634.- La figura està formada per un rectangle que conté sis triangles semblants.
Calculeu la proporció entres àrees
$[verda] : [groga] : [rosa] : [blava]$



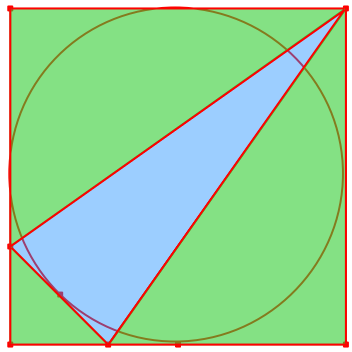
Solució:



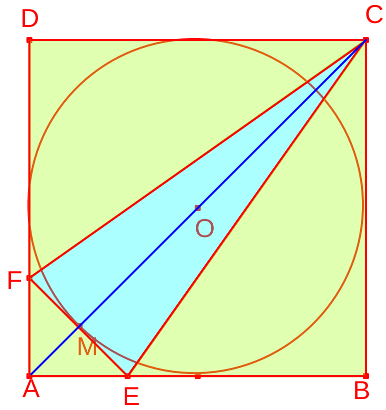

Els sis triangles semblants són rectangles
angle DAE=angle EAF=angle GAB=90º/3=30º
DE=FE=a, AD=2a
AE=sqrt(3)·a
CD=(4/sqrt(3))·a
CF=(2/sqrt(3))·a
CH=(1/sqrt(3))·a

[CHG] : [AED] : [DFC] : [ABG]=CH² : AE² : DF² : AB² = 1 : 9 : 12 : 16

4635.- La figura està formada per un quadrat, la circumferència inscrita al quadrat i un triangle isòsceles que té el costat desigual tangent a la circumferència.
calculeu la proporció entre l’àrea blava i l’àrea verda.



Solució:




AB=2

OC=sqrt(2)

OM=1

CM=1+sqrt(2)

AM=ME=MF=sqrt(2)-1

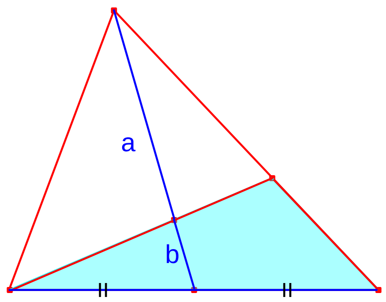
FE==2(sqrt(2)-1)

[EFC]=(1/2)·2(sqrt(2)-1)·sqrt(2)+1)=1

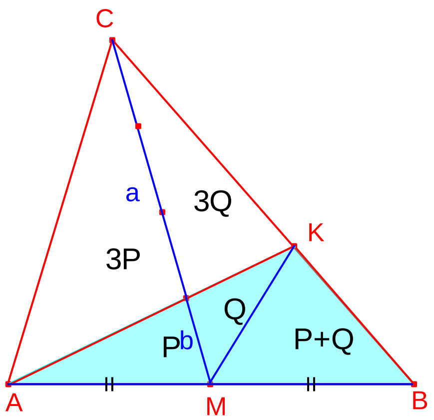
[verda]=[ABCD]-[EFC]=4-1=3

[EFC]/[verda]=1/3

4636.- En la figura, $a : b = 3 : 1$.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i el total de la figura.




Solució:




a/b=3

[AMK]=[BMK]

4P=5Q+P

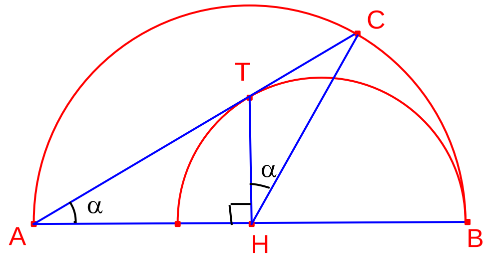
Q=(3/5)P

[ABK]=2P+2Q=(16/5)P

[ABC]=8P

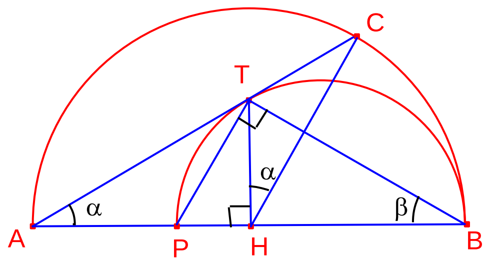
[ABK]/[ABC]=2/5

4637.- La figura està formada per dues semicircumferències i dos angles iguals. Calculeu la mesura de l'angle $\alpha$




Solució:
Siga $\alpha = \angle CAH = \angle THC$

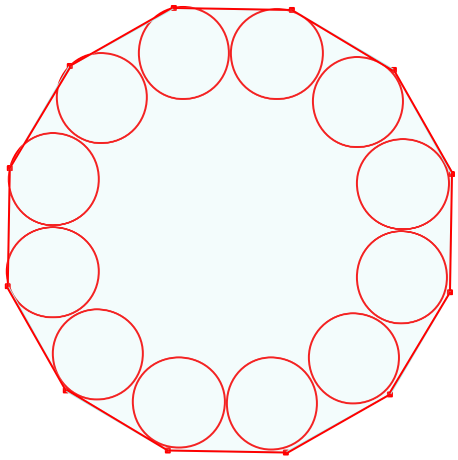
Siga $\beta = \angle ABT = \angle PTH$
$\angle ATP = \beta, \angle CTB = 90° - \beta$
$\angle TBC = \beta$



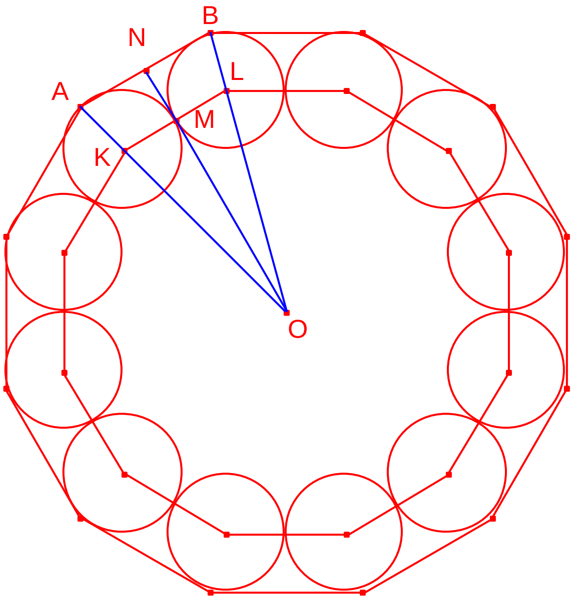

Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{H}T, B\overset{\Delta}{C}T$ són iguals.
$\overline{TH} = \overline{TC}$
Aleshores, $\angle TCH = \alpha$

Nota: H és el centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$

4638.- Les dotze circumferències interiors al dodecàgon regular tenen radi 1.
Calculeu l’àrea del dodecàgon.

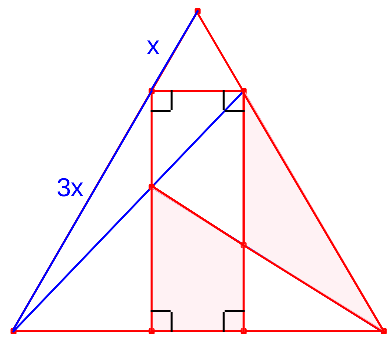


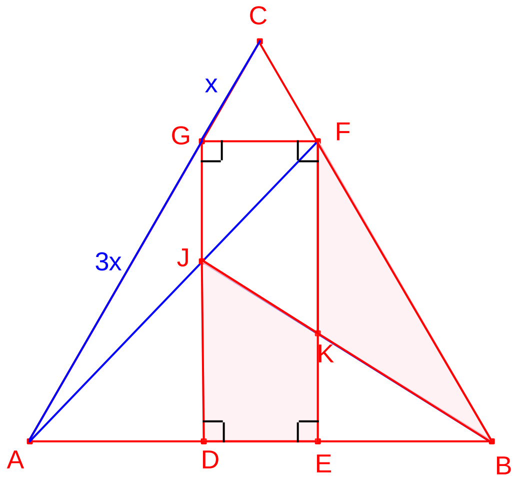
Solució:




Siga $\overline{AB} = c$ costat del dodecàgon regular exterior.
Siga $\overline{KL} = 2$ costat del dodecàgon regular que formen els centres.
Siguen $M, N$ els punts migs dels costats $\overline{KL}, \overline{AB}$, respectivament.
$\overline{MN} = 1$
$\angle AOB = 30°$
$\tan 15° = \frac{1}{\overline{OM}}$
$\overline{OM} = 2 + \sqrt{3}$
L’àrea del dodecàgon de costat $\overline{KL}$ és:
$S_{interior} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 12\left(2 + \sqrt{3}\right)$
Els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OKL}$ són semblants i de raó $\overline{ON} : \overline{OM} = 3 + \sqrt{3} : 2 + \sqrt{3}$
Els dos dodecàgon regulars són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{S_{exterior}}{S_{interior}} = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 = 6\left(2 - \sqrt{3}\right)$
$S_{exterior} = 6\left(2 - \sqrt{3}\right)12\left(2 + \sqrt{3}\right) = 72$

4639.- La figura està formada per un triangle equilàter que conté un rectangle inscrit. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle equilàter.




Solució:

$$\overline{DE} = x, \overline{AD} = \overline{BE} = \frac{3}{2}x$$

$$\overline{EF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

$$\overline{DJ} = \frac{3}{5}\overline{EF} = \frac{9\sqrt{3}}{10}x$$

$$\overline{EK} = \frac{3}{5}\overline{DJ} = \frac{27\sqrt{3}}{50}x$$

$$\overline{FK} = \overline{EF} - \overline{EK} = \frac{24\sqrt{3}}{25}x$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{DEKJ} + S_{DFB} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{10}x + \frac{27\sqrt{3}}{50}x}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{25}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{36\sqrt{3}}{25}x^2$$

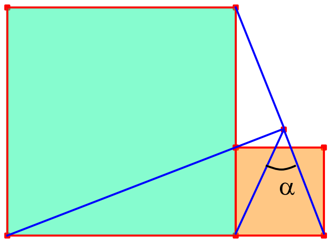
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}16x^2$$

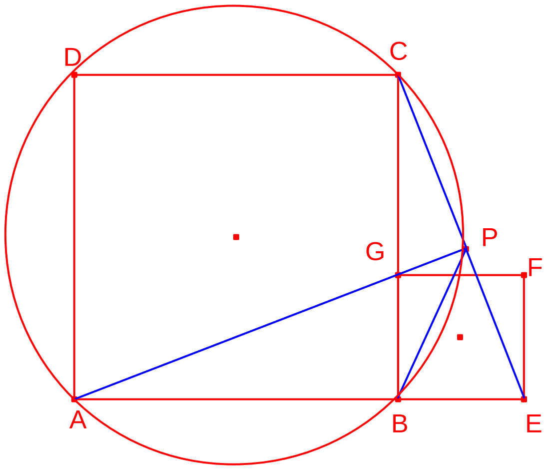
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{36\sqrt{3}}{25}}{4\sqrt{3}} = \frac{9}{25}$$

4640.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha$




Solució:




Els triangles ABG, CBE són iguals

AP, CE perpendiculars

angleAPC=angleABC=90º

ABPCD cíclic

angleAPB=angleACB=45º

angleBPE=45º