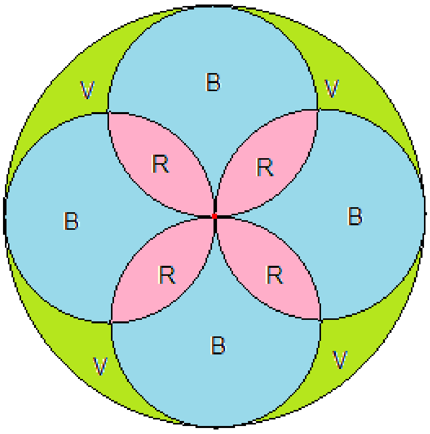
4641.- La figura està formada per una circumferència que conté quatre circumferències. Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.



Solució:
L'àrea d'una de les circumferències interiors és la quarta part de l'àrea de la circumferència exterior.

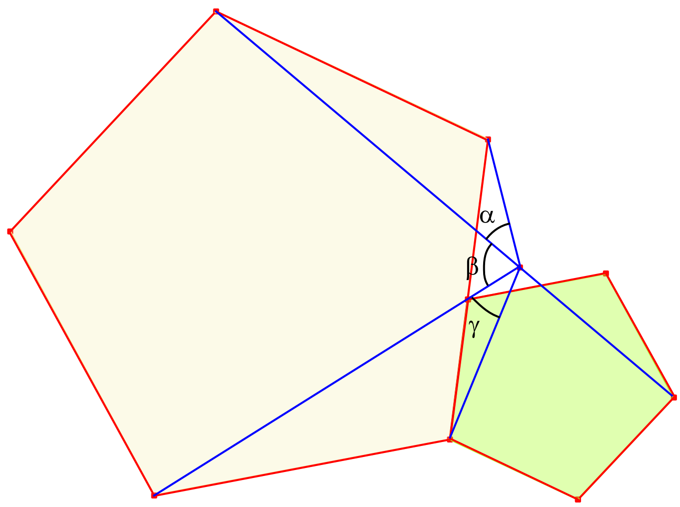
$2R + B = \frac{1}{4}(4(V + B + R)$

Simplificant:

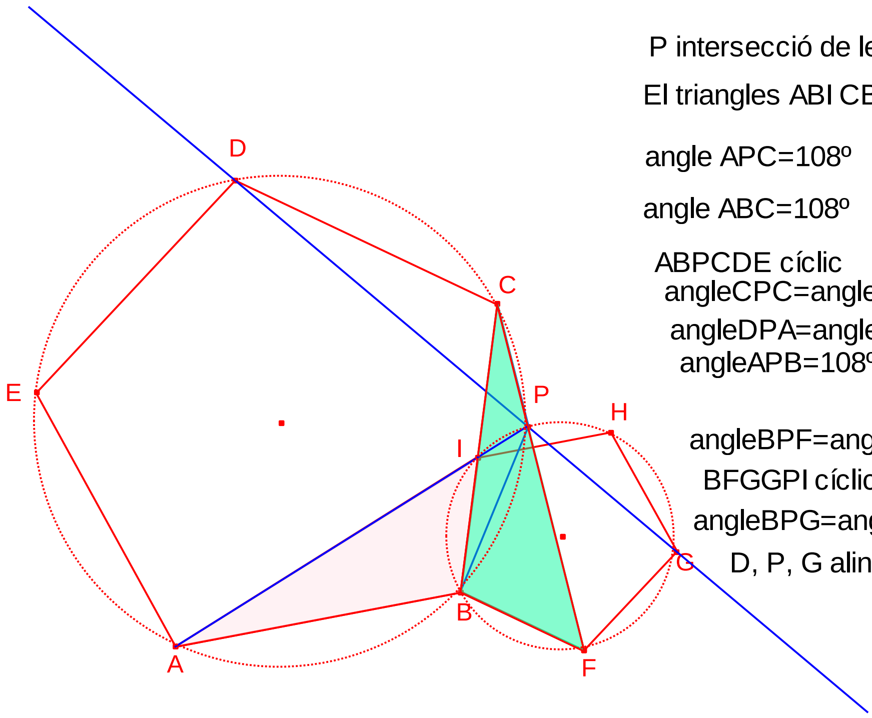
$R = V$

Les dues àrees són iguals, Les àrees estan en proporció $1 : 1$

4642.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.
Calculeu la mesura dels angles α, β, γ



Solució:



P intersecció de les rectesCF, AI

El triangles ABI CBF són iguals

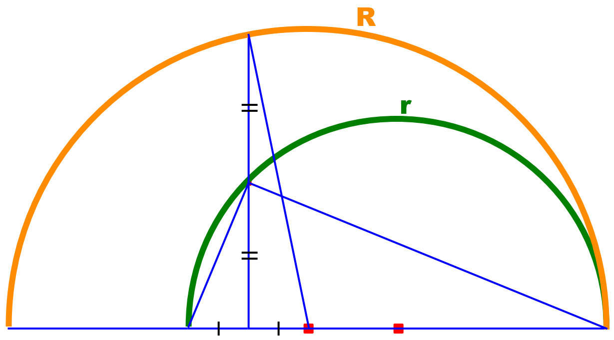
angle APC=108º

angle ABC=108º

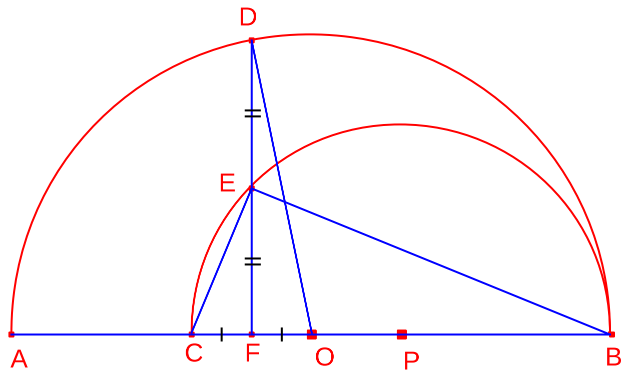
ABPCDE cíclic
angleCPC=angleDBC=36º
angleDPA=angleDBA=72º
angleAPB=108º-(36º+72º)=36º

angleBPF=angleBGF=36º
BFGGPI cíclic
angleBPG=angleBHG=72º
D, P, G alineats

4643.- La figura està formada per dues semicircumferències de radi R, r
Els punts remarcats són centres de les dues semicircumferències
Calculeu la proporció:
$$\frac{r}{R}$$



Solució:



OA=OB=OD=R
PB=PC=r
CF=OF=a
EF=ED=c

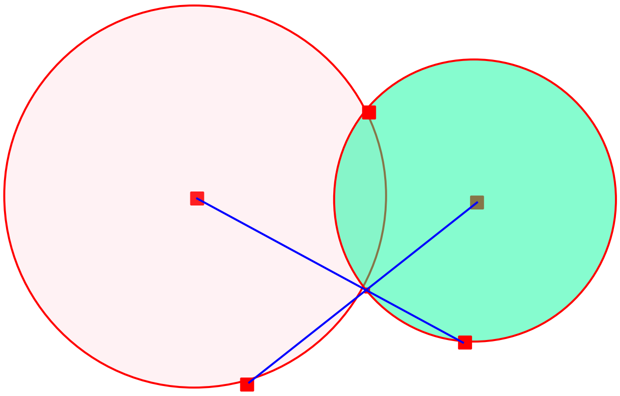
2a+R=2r

Teorema altura CEB
$c^2=a(a+R)$

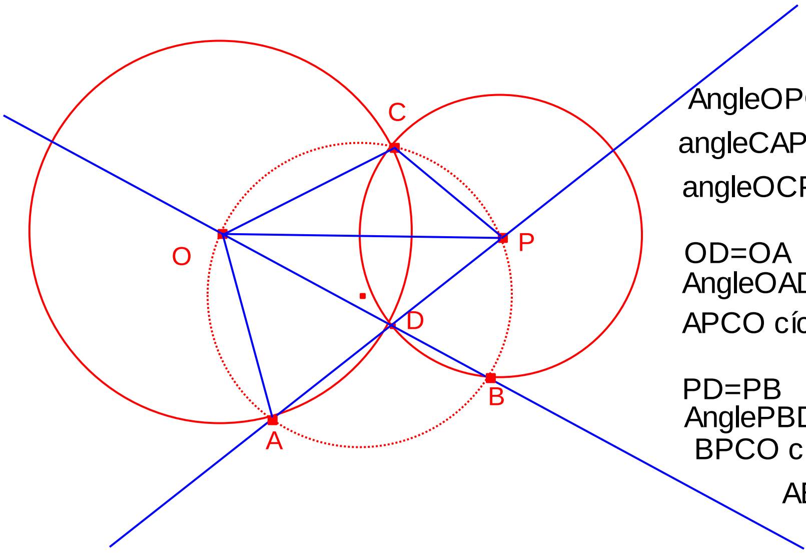
Teorema Pitàgores OFD
$R^2=4c^2+a^2$

$R^2=4(aR+a^2)+a^2$
$a=(1/5)R$
$r/R=7/10$

4643.- La figura està formada per dues circumferències que es tallen, dos segments i cinc punts, dos dels quals són centres. Demostreu que els punts ressaltats són cíclics.



Solució:



AngleOPC=angleDPO=a

angleCAP=angleDOP=b

angleOCP=180º-(a+b)

OD=OA

AngleOAD=angleODA=a+b

APCO cíclic

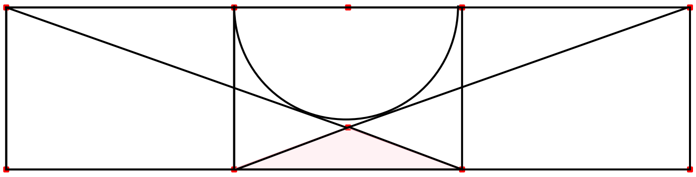
PD=PB

AnglePBD=anglePDB=a+b

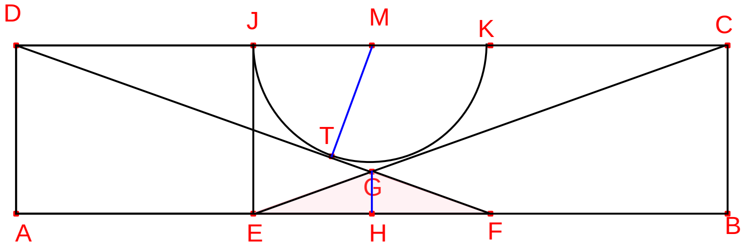
BPCO cíclic

ABPCO cíclic

4645.- La figura està formada per tres rectangles iguals, un semicercle i dos segments tangents.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea total de la figura.



Solució:



MJ=MT=r

DM=3r

AB=6r, AF=4r

DTM, FAD semblants

AD=(4/3)r

DTM, EHG semblants

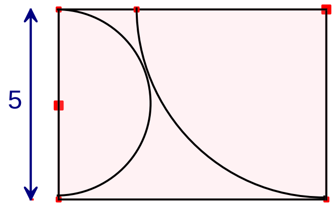
GH=(1/3)r

[EFG]=(1/2)2r·(1/3)r=(1/3)r²

[ABCD]=6r·(4/3)r=8r²

[EFG]/[ABCD]=1/24

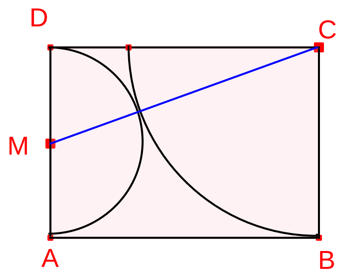
4646.- La figura està formada per un rectangle que conté una semicircumferència i un quadrant tangents.
Calculeu l’àrea del rectangle.



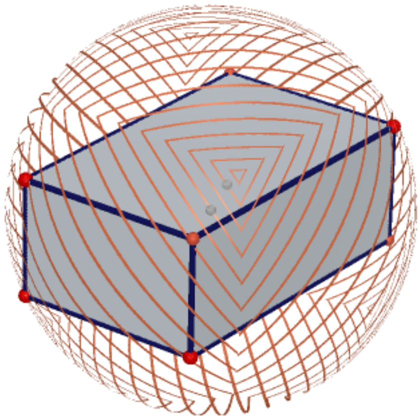
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = 5$
Siga <M el punt mig del costat $\overline{AD}$.

$\overline{DM} = \frac{5}{2}, \overline{CM} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDM}$:
$\overline{CD} = 5\sqrt{2}$
L’àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$



4647.- Un ortoedre d'arestes Φ, Φ^2, Φ^3 està inscrit en una esfera.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'esfera i l'àrea de l'ortoedre.



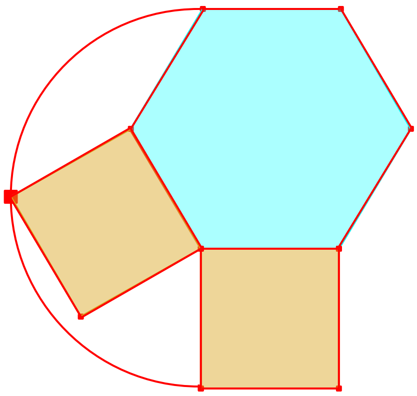
Solució:
La diagonal de l'ortoedre és:
$d = \sqrt{\Phi^2 + \Phi^4 + \Phi^6} = \Phi\sqrt{1 + \Phi^2 + \Phi^4} = 2\Phi^2$
El radi de l'esfera és:
$r = \frac{1}{2}d = \Phi^2$

L'àrea de l'esfera és:
$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi\Phi^4$

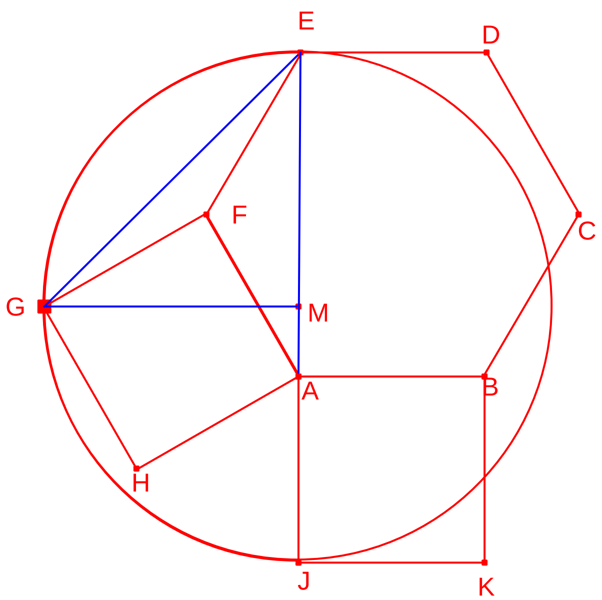
L'àrea de l'ortoedre és:
$S_{ortoedre} = 2(\Phi^3 + \Phi^4 + \Phi^5) = 2\Phi^3(1 + \Phi + \Phi^2) = 4\Phi^5$

La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{esfera}}{S_{ortoedre}} = \frac{4\pi\Phi^4}{4\Phi^5} = \frac{\pi}{\Phi}$

4648.- La figura està formada per un hexàgon regular, dos quadrats i un semicercle que connecta dos vèrtexs. Proveu que el vèrtex vermell remarcat està situat al semicercle.



Solució:



AB=1

AE=sqrt(3)

M punt mig EJ

EM=(1+sqrt(3))/2

angleGFE=150º

angleFEG=15º

angleGEM=45º

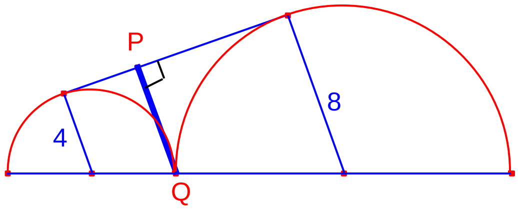
Teorema cosinus GFE

GE^2=2+sqrt(3)

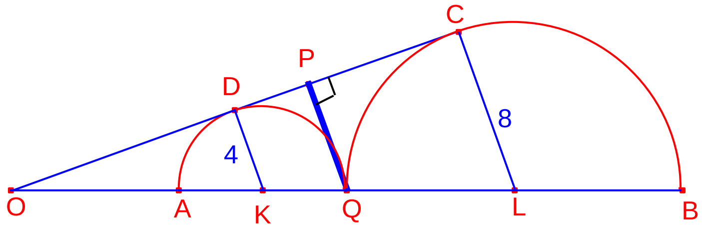
EB^2/GE^2=1/2

GM=EM

4649.- La figura està formada per dues semicircumferències de radis 4, 8 i la tangent exterior a les dues semicircumferències.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$



Solució:



Siga $\overline{OA} = a$

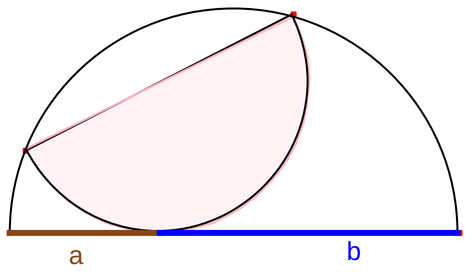
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ODK}, \overset{\Delta}{OPQ}, \overset{\Delta}{OCL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PQ}}{8+a} = \frac{8}{16+a} = \frac{4}{4+a} = \frac{1}{3}$$

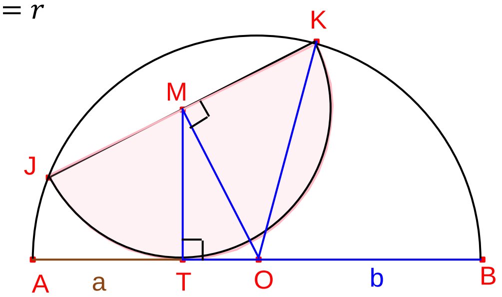
Resolent el sistema:

$$a = 8, \overline{PQ} = \frac{16}{3}$$

4650.- La figura està formada per dues semicircumferències.
Calculeu l'àrea de la semicircumferència ombrejada.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = a + b$
Siga la semicircumferències de centre M i radi $\overline{MT} = \overline{MK} = r$



$$\overline{OA} = \overline{OK} = \frac{a+b}{2}$$
$$\overline{OM} = \frac{b-a}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MTO}, \overset{\Delta}{OMK}$:
$$r^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - r^2$$
Simplificant:
$$r^2 = \frac{1}{2}ab$$
L'àrea del semicercle ombrejat és:
$$S_{ombrejat} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}ab$$