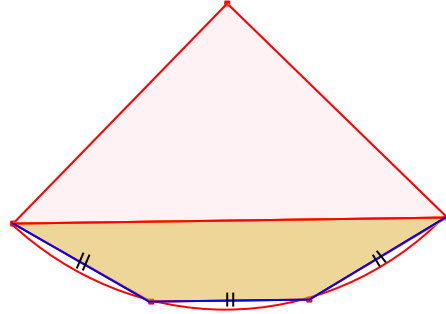
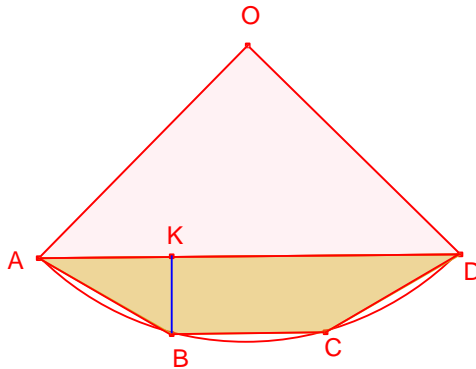


Problemes de Geometria per a l'ESO 467

4661.- La figura està formada per un quadrant i tres cordes iguals.
 Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea groga.



Solució:



$$\text{angleAOD}=90^\circ$$

$$\text{angleAOB}=\text{angleBOC}=\text{angleCOD}=30^\circ$$

$$OA=1$$

$$AD=\sqrt{2}$$

teorema cosinus AOB

$$AB^2=2-2\cos(30^\circ)$$

$$\text{angleDAB}=30^\circ$$

$$BK=AB \cdot \sin(30^\circ)$$

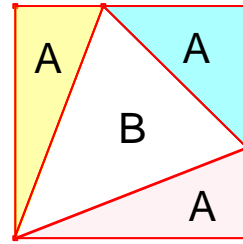
$$[AOD]=\frac{1}{2}$$

$$[ABCD]=\frac{(AB+BC)}{2} \cdot BK = \frac{(2-2\cos(30^\circ)+2-1)}{4} = \frac{1}{4}$$

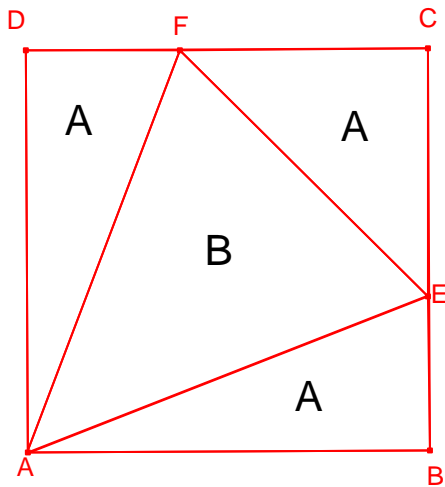
$$\frac{[AOD]}{[ABCD]}=2$$

4662.- La figura està formada per un quadrat que està dividit en tres triangles d'àrees A, A, A, B
 Calculeu la proporció:

$$\frac{B}{A}$$



Solució:



$$DF=1, AD=a$$

$$CF=CE=a-1$$

$$a=(a-1)^2$$

$$a^2-3a+1=0$$

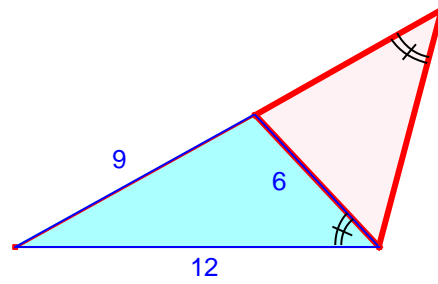
$$a=(3+\sqrt{5})/2=1+\Phi=\Phi^2$$

$$A=\Phi^2/2$$

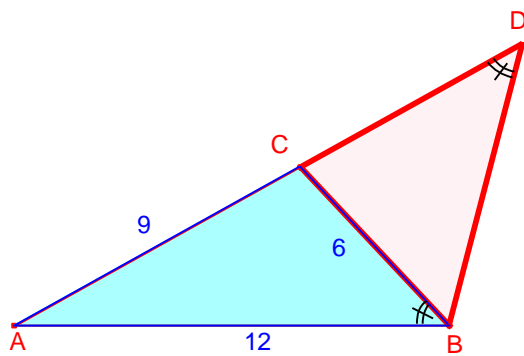
$$B=\Phi^4-3A=\Phi^2(\Phi^2-3/2)$$

$$B/A=\sqrt{5}$$

4663.- La figura està formada per un triangle blau de costats 12, 6, 9 i un triangle rosa. Calculeu la proporció entre els perímetres dels dos triangles ombrejats.



Solució:



$$BD=a, CD=b$$

Els triangles ABD, ADC són semblants

Aplicant el teorema de Tales

$$a/6=12/9$$

$$a=8$$

$$(9+b)/12=12/9$$

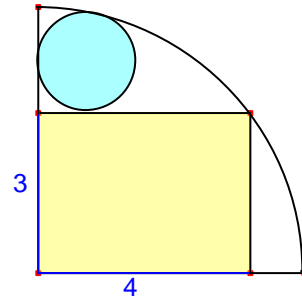
$$b=7$$

$$\text{PerimABC}=27$$

$$\text{PerimBCD}=21$$

$$\text{PerimBCD} / \text{PerimABC} = 7/9$$

4664.- La figura està formada per un quadrant que conté un rectangle de costats 4, 3 i una circumferència.
 Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:

Siga el rectangle $OJKL$ de costats $\overline{OJ} = 4, \overline{OL} = 3$

Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OK} = 5$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$

$\overline{OP} = 5 - r, \overline{OT} = 3 + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OTP$:

$$(5 - r)^2 = r^2 + (3 + r)^2$$

Simplificant:

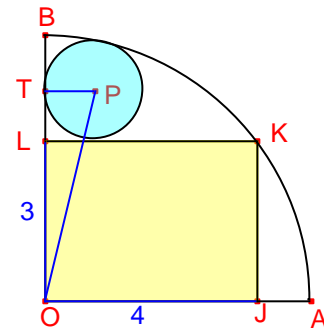
$$r^2 + 16 - 16 = 0$$

Resolent l'equació:

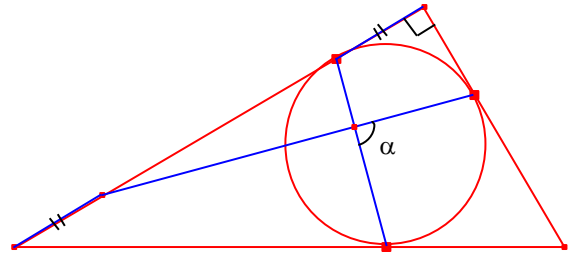
$$r = -8 + 4\sqrt{5}$$

L'àrea del cercle és:

$$S_{\text{cercle}} = 16\pi(9 - 4\sqrt{5}) \approx 2.8012$$



4665.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté la circumferència inscrita. Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$

Siga la circumferència inscrita al triangle de centre I i radi $r = \overline{ID} = \overline{IF}$

\overline{AI} és perpendicular a \overline{EF}

$$\overline{BE} = \overline{AL} = r = \frac{a + c - b}{2}$$

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{b + c - a}{2}$$

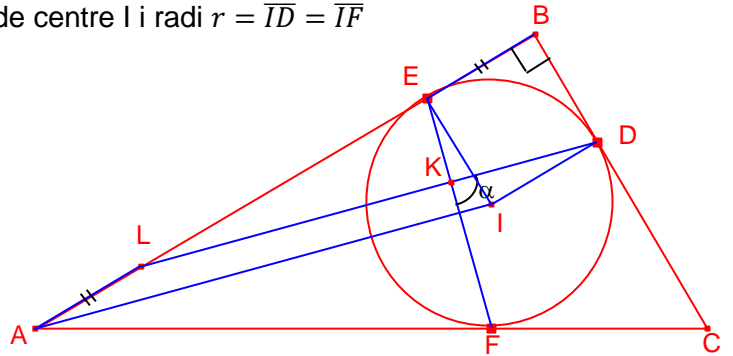
$$\overline{BL} = c - r = \frac{b + c - a}{2}$$

Els triangles rectangles $\triangle LBD$, $\triangle AEI$ són iguals.

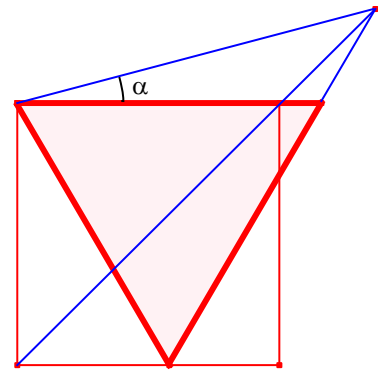
Aleshores, \overline{LD} , \overline{AI} són paral·lels.

Aleshores, \overline{LD} , \overline{EF} són perpendiculars.

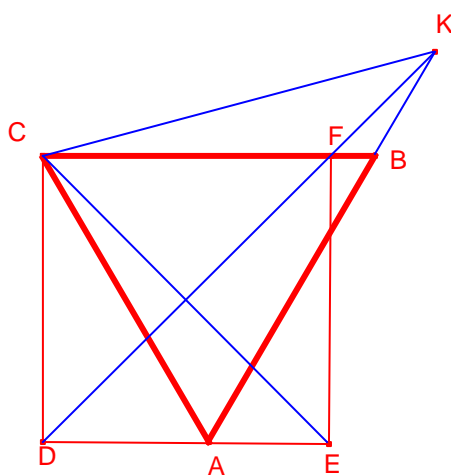
$\alpha = 90^\circ$



4666.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
 L'extensió d'un costat del triangle i una diagonal del quadrat es tallen en un punt.
 Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



$$AB=2$$

$$DA=1, ADE=\sqrt{3}$$

$$AE=\sqrt{3}-1$$

$$FB=2-\sqrt{3}$$

els triangles DAK, FBK semblants

$$BK/AC=FB/AE$$

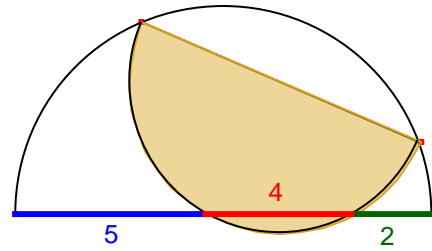
$$BK=2 \cdot (2-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$$

$$BK=AE$$

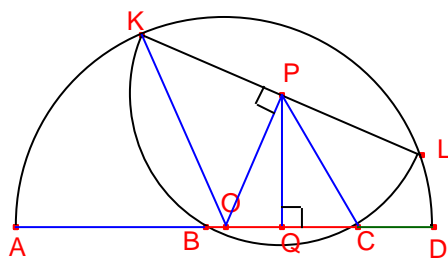
Els triangles CBK, CAE són iguals

$$\text{angleKCB}=\text{angleACE}=15^\circ$$

4667.- La figura està formada per dos semicercles.
 Calculeu l'àrea del semicercle ombrejat.



Solució:



$$AB=5, BC=4, CD=2$$

$$OA=OD=11/2$$

$$PK=PB=PC=r$$

$$OQ=3/2, CQ=2$$

Teorema Pitàgores KPO

$$OP=\sqrt{121/4-r^2}$$

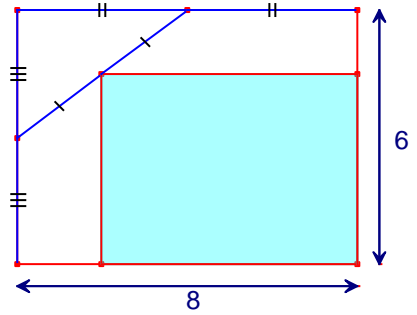
Teorema Pitàgores OQP, CQP

$$121/4-r^2-9/4=r^2-4$$

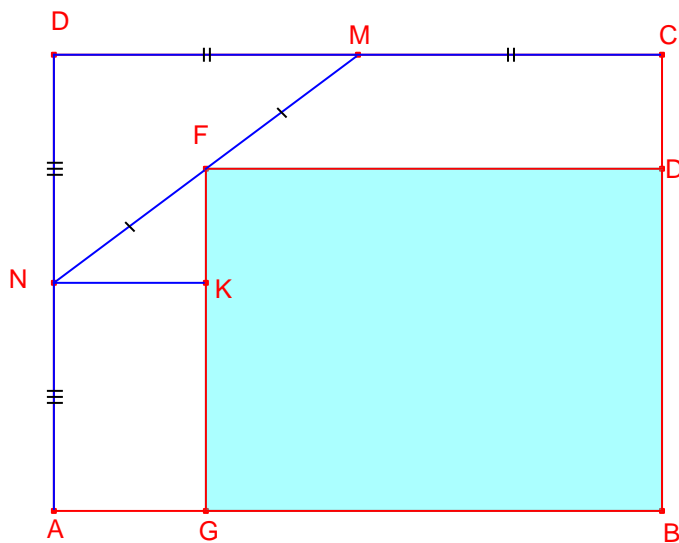
$$r=4$$

$$S=(1/2)r^2 \cdot \pi = 8 \cdot \pi$$

4668.- La figura està formada per dos rectangles.
 Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



$$AB=8, AD=6$$

$$DM=4, DN=3$$

$$MN=5$$

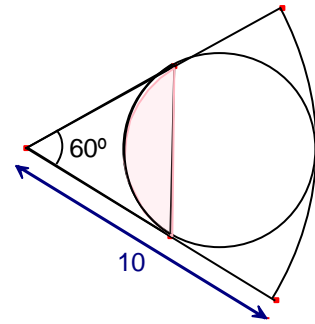
$$NF=5/2$$

$$NK=2, FK=3/2$$

$$GB=6, GF=9/2$$

$$[GBDF]=6 \cdot 9/2=27$$

4669.- La figura està formada per un sector d'angle 60° i radi 10 que conté una circumferència tangent. Calculeu l'àrea del segment circular ombrejat.



Solució:

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PM} = r$

$\angle LPK = 120^\circ$

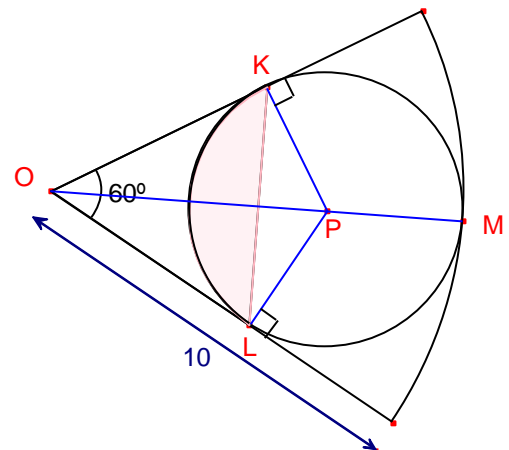
$\overline{OP} = 2 \cdot \overline{LK} = 2r$

$\overline{OM} = 3r = 10$

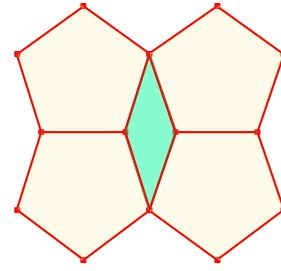
$r = \frac{10}{3}$

L'àrea del segment circular de 120° i radi $r = \frac{10}{3}$ és:

$$S_{segment} = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{100\pi}{27} - \frac{25\sqrt{3}}{9} \approx 6.8243$$



4670.- La figura està formada per quatre pentàgons regulars.
 Calculeu la proporció entre l'àrea total dels quatre pentàgons regulars i l'àrea del quadrilàter.



Solució:

Els triangles $\triangle ABD$, $\triangle BFC$ són semblants i de raó $\Phi : 1$

Siga $S_{BFC} = 1$

$$S_{ABD} = \Phi^2 \cdot S_{BFC} = \Phi^2$$

$$\angle BCF = \angle EDA = 36^\circ$$

$$S_{ADE} = \Phi \cdot S_{BFC} = \Phi$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{4\text{pentàgons}}}{S_{BCFG}} = \frac{8 \cdot S_{ADE} + 4 \cdot S_{ABD}}{2 \cdot S_{BFC}} = 4\Phi + 2\Phi^2 = 5 + 3\sqrt{5}$$

