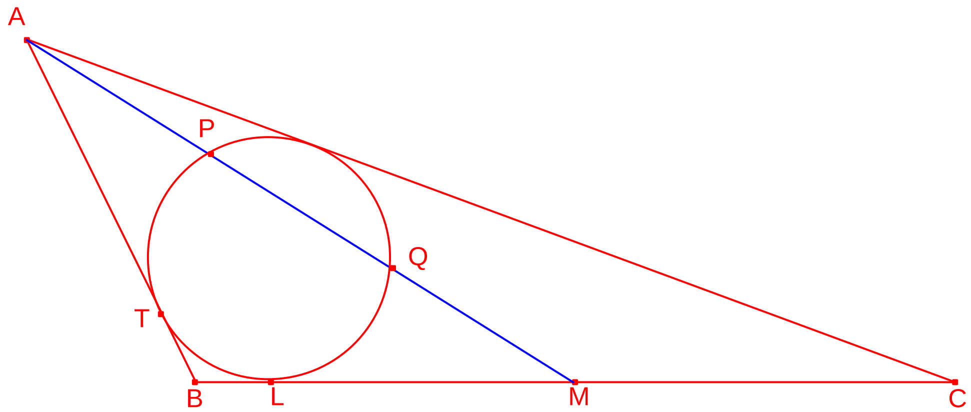
4681.- El perímetre d'un triangle és 28, una mitjana divideix la circumferència inscrita en tres parts iguals.
Determineu els costats del triangle.

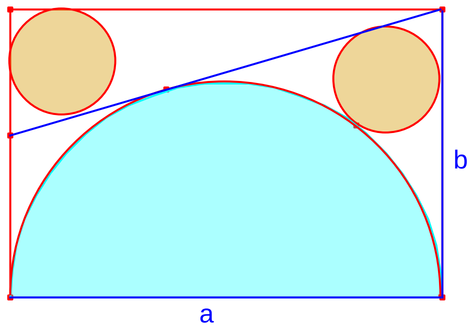
Solució:



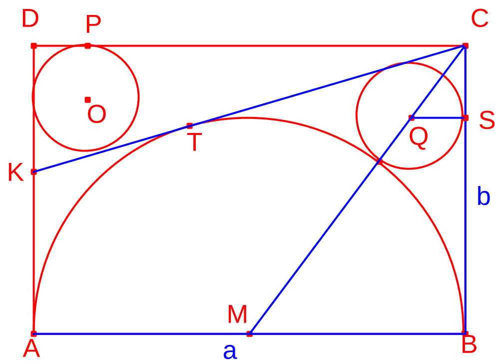
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a+b+c=28$
suposem $b \geq c$
$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$
$\overline{AT}=14-a, \overline{BL}=14-b$
$\overline{LM}=\frac{b-c}{2}$
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència inscrita:
$(14-a)^2=2\cdot\overline{AP}^2=\frac{1}{18}(2b^2+2c^2-a^2)$
Aplicant la potència de M respecte de la circumferència inscrita:
$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2=2\cdot\overline{AP}^2$
$(14-a)^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$
$2a+b-c=0$
$c=\frac{1}{2}a, b=\frac{56-3a}{2}$

$(14-a)^2=\frac{1}{18}\left(2\left(\frac{56-3a}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}a\right)^2-a^2\right)$
Simplificant:
$a^2-24a+140=0$
$a=10, b=13, c=5$

4682.- La figura està formada per un rectangle amb dos cercles iguals, un semicercle i una tangent comuna. Calculeu la proporció de longituds dels costat $a : b$



Solució:
Siga $\overline{CT} = \overline{BC} = b$
Siga $\overline{AK} = \overline{TK} = c$
$\overline{DK} = b - c$

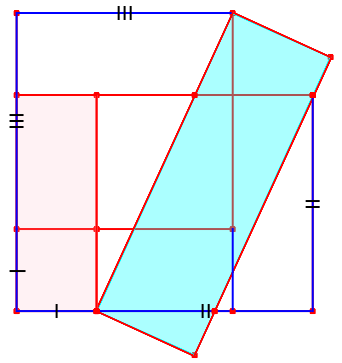


Siga $\overline{OP} = \overline{QS} = r$
$$r = \frac{\overline{CD} + \overline{DK} - \overline{CK}}{2} = \frac{a - 2c}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$
$$(b + c)^2 = a^2 + (b - c)^2$$
$$c = \frac{a^2}{4b}$$
$$r = \frac{a(2b - a)}{4b}$$

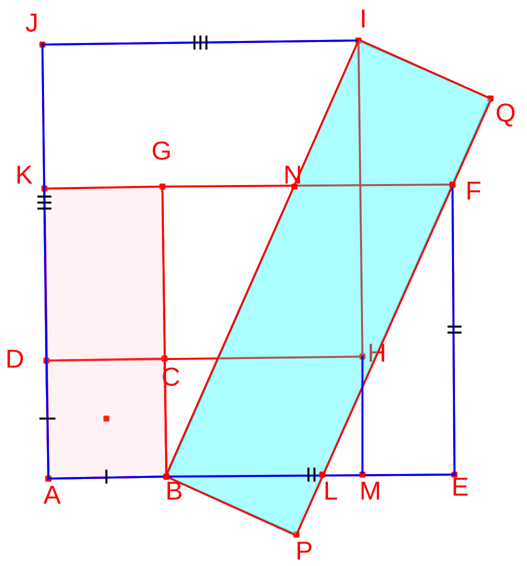
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{QSC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$$\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a - r}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}}$$
$$r = \frac{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a} \cdot \frac{1}{2}a$$

$$\frac{a(2b - a)}{4b} = \frac{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a} \cdot \frac{1}{2}a$$
Simplificant:
$$\frac{2b - a}{2b} = \frac{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a}$$
$$-\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} = -2b + \frac{1}{2}a$$
Elevant al quadrat
$3b = 2a$
$a : b = 3 : 2$

4683.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l’àrea del rectangle rosa i l’àrea del rectangle blau.



Solució:



AB=BC=a

BE=EF=b

JD=DH=c

[ABGH]=ab

els triangles BMI, LEF semblants

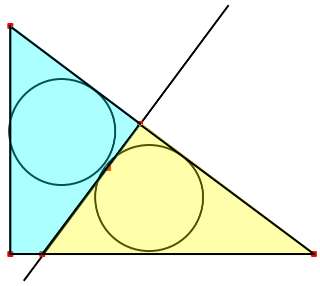
LE=b(c-a)/(a+c)

BL=b-LE=b(2a/(a+c))

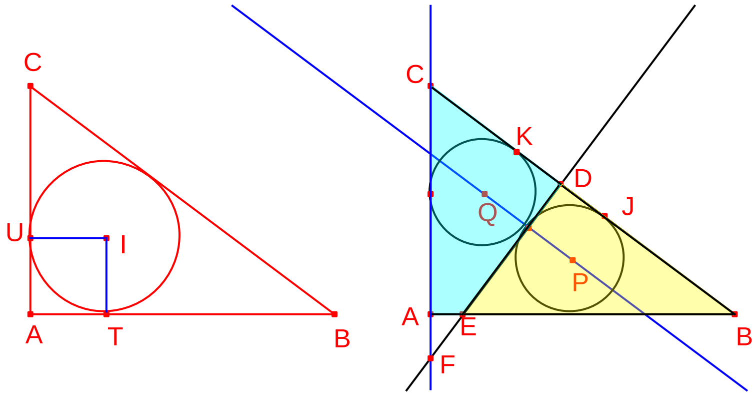
[BPQI]=BL·MI=2ab

[ABGH]/[BPQI]=1/2

4684.- La figura està formada per un triangle de costats 3-4-5, dues circumferències iguals i la recta tangent a les dues circumferències que divideix el triangle en un triangle i un quadrilàter.
Determineu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 5, b = 3, c = 4$

Considerem la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi $r = \overline{IT} = \overline{IU}$.

$r = \dfrac{b + c - a}{2} = 1$

$\overline{CU} = 2, \overline{BT} = 3$

Siguen les circumferències tangents de centres P, Q i radis $\overline{PJ} = \overline{DJ} = s, \overline{QK} = \overline{DK} = s$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BJ} = 3 \cdot \overline{DJ} = 3r.$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DFC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{CK} = 2 \cdot \overline{DK} = 3r.$

$\overline{BC} = 5 = 7r$

Resolent l'equació:

$r = \dfrac{5}{7}$

L'àrea groga és:

$S_{DFC} = \dfrac{1}{2} 4r \cdot 3r = 6r^2 = \dfrac{150}{49}$

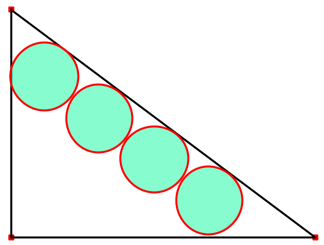
L'àrea blava és:

$S_{ACDE} = S_{ABC} - S_{DFC} = \dfrac{1}{2} 3 \cdot 4 - \dfrac{150}{49} = \dfrac{144}{49}$

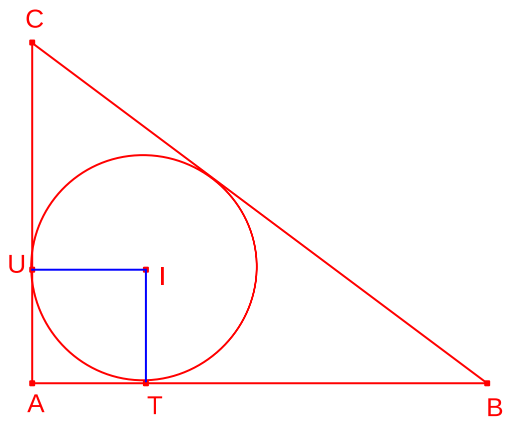
La proporció d'àrees és:

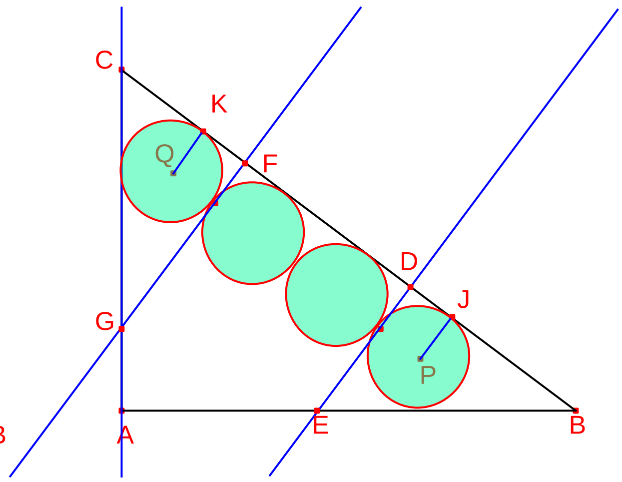
$$\frac{S_{DFC}}{S_{ACDE}} = \frac{\frac{150}{49}}{\frac{144}{49}} = \frac{25}{24}$$

4685.- La figura està formada per un triangle de costats 3-4-5, n circumferències iguals tangents i tangent a la hipotenusa.
Calculeu el radi de cadascuna de les circumferències.



Solució:





Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 5, b = 3, c = 4$

Considerem la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi $r = \overline{IT} = \overline{IU}$.

$$r = \frac{b + c - a}{2} = 1$$

$\overline{CU} = 2, \overline{BT} = 3$

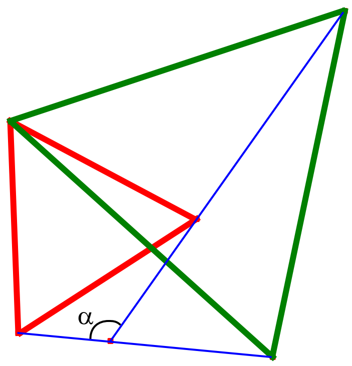
Siguen les circumferències tangents de centres P, Q i radis $\overline{PJ} = \overline{DJ} = s, \overline{QK} = \overline{FK} = s$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BJ} = 3 \cdot \overline{DJ} = 3r$.

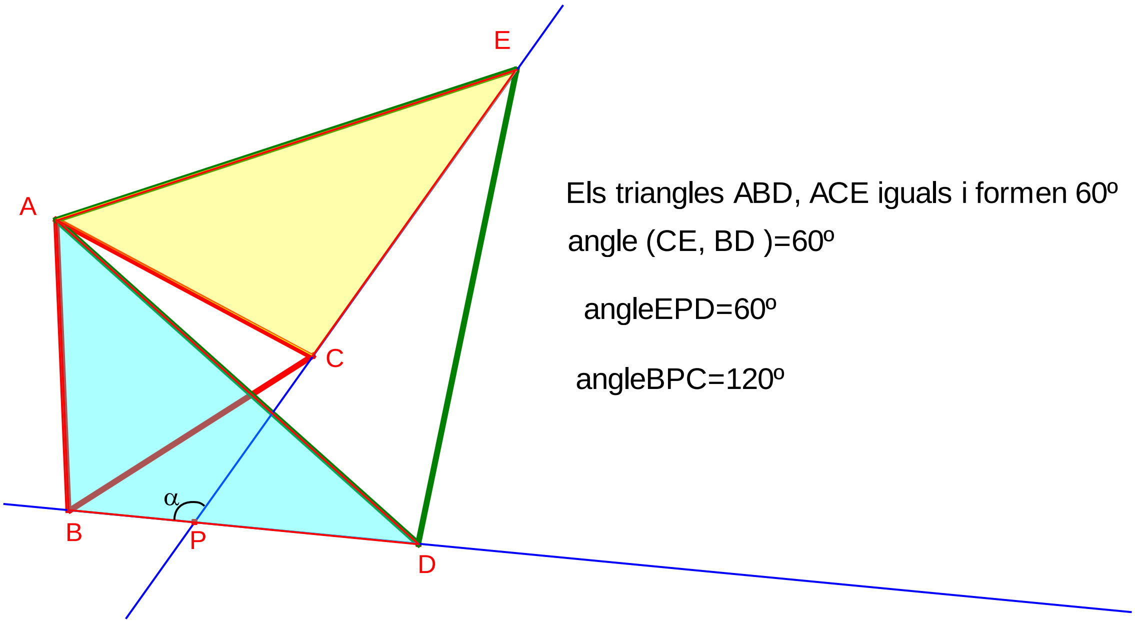
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{FGC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CK} = 2 \cdot \overline{FK} = 3r$.
$\overline{BC} = 5 = 5r + 2r + 2(n-2)r = (2n+3)r$
Resolent l’equació:

$$r = \frac{5}{2n+3}$$

4686.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



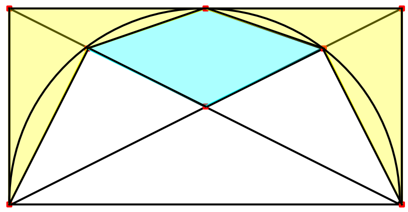
Els triangles ABD, ACE iguals i formen 60º

angle (CE, BD)=60º

angleEPD=60º

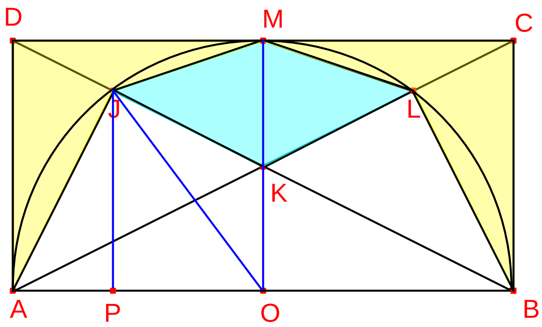
angleBPC=120º

4687.- La figura està formada per un rectangle que conté una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 2, \overline{AD} = 1$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OM} = 1$
Siga K la intersecció de les diagonals del rectangle.

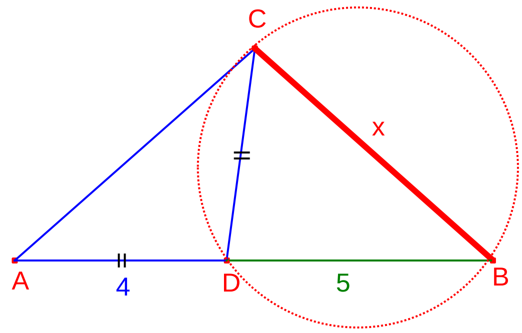
$$\overline{OK} = \overline{KM} = \frac{1}{2}$$



Siga P la projecció de J sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{JP} = x$
$\overline{BP} = 2x$
$\overline{OP} = 2x - 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JPO}$:
$$1 = x^2 + (2x-1)^2$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{4}{5}$$
$$\overline{OP} = \frac{3}{5}$$
L'àrea blava és:
$$S_{JKLM} = \overline{KM} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

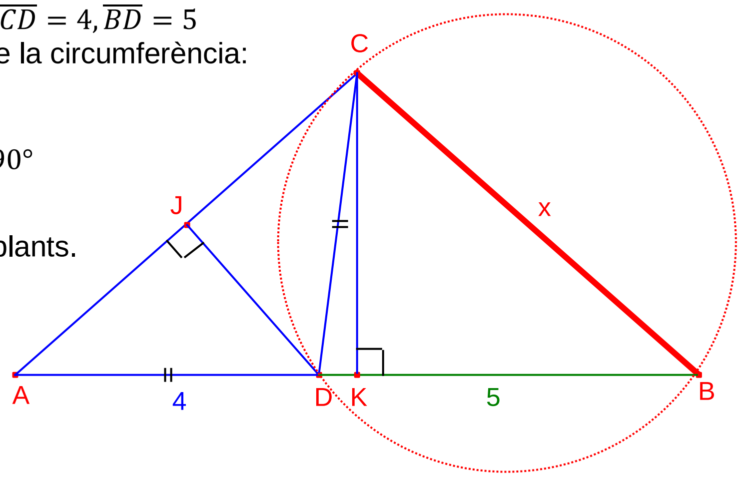
$$S_{ABJ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$
$$S_{OBK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OK} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$S_{AOKJ} = S_{ABJ} - S_{OBK} = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$
$$S_{JKM} = \frac{1}{2} \cdot S_{JKLM} = \frac{3}{20}$$
$$S_{AOMJ} = S_{AOKJ} + S_{AJK} = \frac{11}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{10}$$
$$S_{ALMD} = S_{AOMD} - S_{AOMJ} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$
L'àrea groga és:
$$S_{groga} = 2 \cdot S_{ALMD} = \frac{3}{5}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{JKLM}}{S_{groga}} = \frac{1}{2}$$

4688.- En el triangle de la figura la circumferència és tangent al segment $\overline{AC}$ calculeu la mesura del costat x

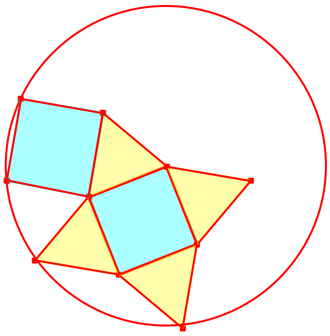


Solució:

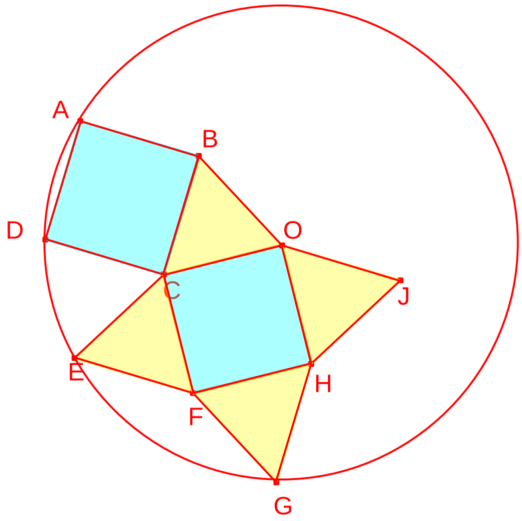
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga D el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{Ad} = \overline{CD} = 4, \overline{BD} = 5$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:
$4 \cdot 9 = \overline{AC}^2$
$\overline{AC} = 6$
Siga J el punt mig del costat $\overline{AC}$, $\angle AJD = 90°$
Siga K la projecció de C sobre $\overline{AB}$
Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{AKC}, \overset{\Delta}{AJD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AK}}{6} = \frac{3}{4}$
$\overline{AK} = \frac{9}{2}$
Aleshores, K és el punt mig del costat $\overline{AB}$
Aleshores, $\overline{BC} = \overline{AC} = 6$



4669.- La figura està formada per dos quadrats i quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea ombrejada.



Solució:



AB=c

OA=OD=OE=OG

ADEG cíclic

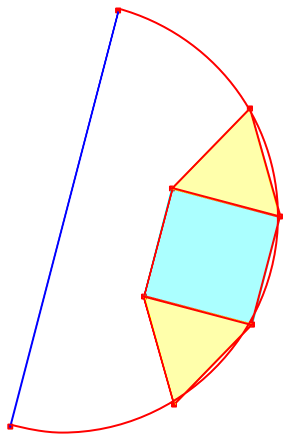
$OA^2=(2+sqrt(3))c^2$

$[Ombrejada]=2c^2+4\cdot sqrt(3)/3\cdot c^2=(2+sqrt(3))c^2$

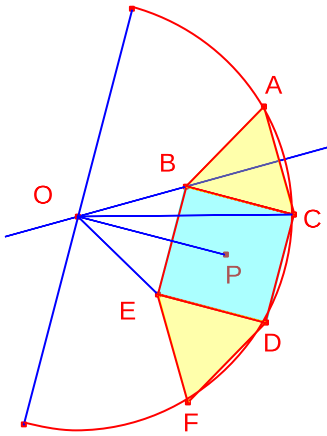
$[Cecle]=(2+sqrt(3))\cdot Pi\cdot c^2$

[Circle]/[Ombrejada]=Pi

4690.- La figura està formada per un semicercle, un quadrat i dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l’àrea del semicercle i l’àrea ombrejada.



Solució:



AB=c
angleBOC=30º
OB=OE=c
OA=OC=OD=OF
ACDF cíclic
$OC^2=(2+\mathrm{sqrt}(3))c^2$
[Semicecle]=(2+sqrt(3))·Pi·c^2/2
[ombrejada]=$2c^2$+2·sqrt(3)/3·c^2=(2+sqrt(3))c^2/2
[Semiircle]/[ombrejada]=Pi