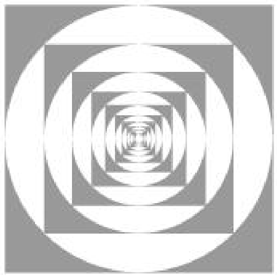
461.- Quin és el nombre d'angles aguts màxim que tenen els angles interiors d'un polígon convex?.
KöMaL, K317.

Solució:
Siga n el nombre de costats (angles interiors) d'un polígon convex.
La suma dels angles interiors és:
$180º(n-2)$.

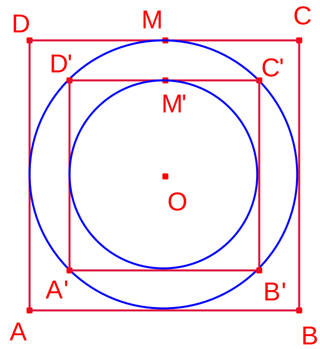
Siga k el nombre d'angles aguts del polígon convex.
El nombre d'angles obtusos és $n-k$.

$90ºk+(n-k)180º > 180º(n-2)$.
Simplificant:
$-90k > 360º$.
Resolent l'equació:
$k < 4$.
Aleshores el màxim nombre d'angles aguts que tenen els polígons convexes és 3.

462.- Un cercle blanc està inscrit en una quadrat gris de costat 1 (veure figura). Un quadrat gris està inscrit en el cercle i el procés segueix fins l'infinit.
Quin és el total de l'àrea grisa.
KöMaL, B4402.



Solució:
Siga ABCD el quadrat exterior de costat 1.
Calculem l'àrea del quadrat inscrit en el cercle.
El radi del cercle inscrit en el quadrat ABCD és:



$$\overline{OM} = \overline{OD'} = \frac{1}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OC'D'}$:

$$\overline{C'D'}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

L'àrea del quadrat A'B'C'D' és:

$$S_{A'B'C'D'} = \overline{C'D'}^2 = \frac{1}{2}.$$

La proporció de les àrees de dos quadrat consecutius és $\frac{1}{2}$.

La proporció de dos cercles consecutius és $\frac{1}{2}$.

L'àrea total grisa és igual a l'àrea dels infinits quadrats menys l'àrea dels infinits cercles.

Les àrees dels quadrats formen una progressió geomètrica de primer terme 1, i raó $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$$

La seua suma infinita és:

$$S_q = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Les àrees dels cercles formen una progressió geomètrica de primer terme $\pi\frac{1}{4}$, i raó $\frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \ldots\ldots$$

La seua suma infinita és:

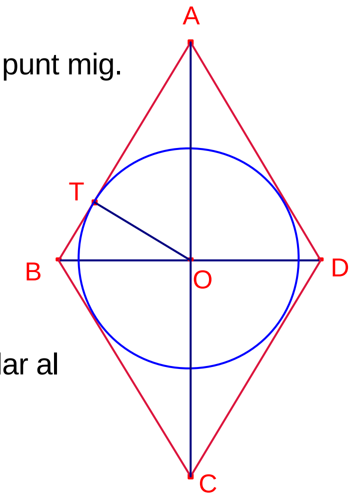
$$S_c = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

L'àrea grisa és:

$$S_g = S_q - S_c = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

463.- Calculeu el radi de la circumferència inscrita a un rombe de diagonals 2a, 2b.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry".
Pàgina 135, problema 25.

Solució:



Siga el rombe ABCD de diagonals $\overline{AC} = 2a$, $\overline{BD} = 2b$.
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i s'intersecten en el punt mig.
Siga O la intersecció de les diagonals.
$\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOA}$:
$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al rombe i el costat $\overline{AB}$.
$r = \overline{OT}$, radi de la circumferència inscrita al rombe, és perpendicular al costat $\overline{AB}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOA}$ és:

$$S_{BOA} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OT}}{2}.$$

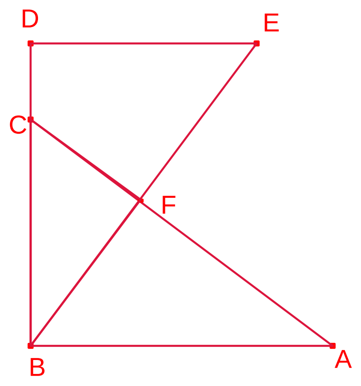
$$\frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot r}{2}.$$

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

464.- Siguen $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BDE}$ dos triangles iguals $\angle ABC = \angle BDE = 90^{\circ}$ tal que els vèrtexs B, C i D pertanyen a una recta, amb C entre B i D, i els vèrtexs A i E estan en el mateix semipla respecte de la recta BD.

Si $\overline{AB} = \overline{BD} = 4$ i $\overline{BC} = \overline{DE} = 3$, calculeu l'àrea comuna als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BDE}$.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BDE}$:

$\overline{AC} = \overline{BE} = 5$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és:

$$S_{BDE} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 .$$

Siga F la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$.

Notem que $\angle BFC = 90^{\circ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BDE}$, $\overset{\Delta}{BFC}$ són semblants, aleshores, les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança.

$$\frac{S_{BFC}}{S_{BDE}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}\right)^2 .$$

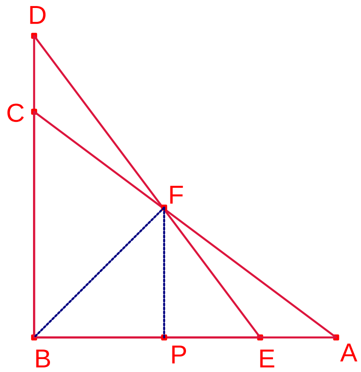
$$\frac{S_{BFC}}{6} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 .$$

$$S_{BFC} = \frac{54}{25} .$$

465.- Siguen $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BDE}$ dos triangles iguals $\angle ABC = \angle DBE = 90^{\circ}$ tal que els vèrtexs B, C i D pertanyen a una recta, amb C entre B i D, i els vèrtexs A i E estan en el mateix semipla respecte de la recta BD.

Si $\overline{AB} = \overline{BD} = 4$ i $\overline{BC} = \overline{DE} = 3$, calculeu l'àrea comuna als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BDE}$.

Solució:



Siga F la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$.

El punt F pertany a la bisectriu de l'angle $\angle ABC$.

$\angle FBA = 45^{\circ}$.

L'àrea comuna als dos triangles és el quadrilàter BEFC

Siga P la projecció de F sobre $\overline{AB}$.

Siga $x = \overline{BP} = \overline{FP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{APF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

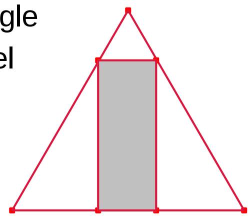
$\dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{4-x}$. Resolent l'equació:

$x = \dfrac{12}{7}$.

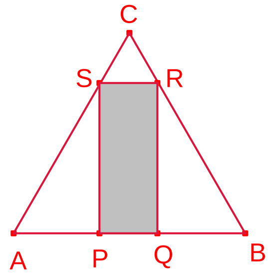
L'àrea del quadrilàter BEFC és:

$$S_{BEFC} = 2 \cdot S_{BEF} = 2\frac{\overline{BE} \cdot \overline{FP}}{2} = 3 \cdot \frac{12}{7} = \frac{36}{7}.$$

466.- En la figura, el rectangle té els vèrtexs en els costats d'un triangle equilàter d'àrea $40cm^2$. El costat menor del rectangle és un quart del costat del triangle. Calculeu l'àrea del rectangle.
Olimpíada brasilera 2011, primera fase, nivell 2.



Solució 1:
Les àrees de dos triangles equilàters són proporcionals als quadrats de la raó de semblança dels dos triangles.



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter d'àrea $40cm^2$.

Siga PQRS el rectangle tal que $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.

$\overset{\Delta}{CRS}$ és un triangle equilàter.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APS}$, $\overset{\Delta}{BQR}$ són iguals.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APS}$ és igual a la meitat d'un triangle equilàter de costat $\frac{3}{4}\overline{AB}$.

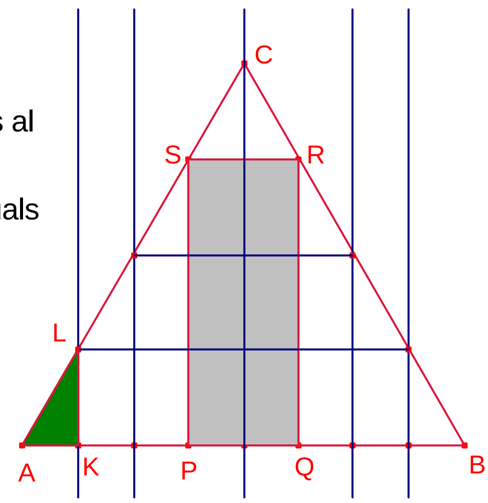
L'àrea del rectangle PQRS és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, menys les àrees de dos triangles equilàters de costats $\frac{1}{4}\overline{AB}$, $\frac{3}{4}\overline{AB}$.

$$S_{PQRS} = S_{ABC} - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{ABC} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 S_{ABC}\right) = \frac{3}{8}S_{ABC} = \frac{3}{8}40 = 15cm^2 .$$

Solució 2:
Dividim el costat $\overline{AB}$ en 8 parts iguals.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ està format per 32 triangles iguals al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKL}$.
L'àrea del rectangle PQRS està format per 12 triangles iguals al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKL}$.
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

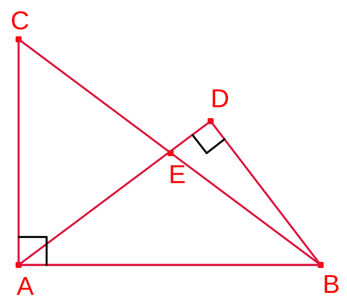


L'àrea del rectangle PQRS és igual a $\frac{3}{8}$ l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

$$S_{PQRS} = \frac{3}{8}S_{ABC} = \frac{3}{8}40 = 15cm^2 .$$

467.- En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ són rectangles en A i D, respectivament.

Sabent que $\overline{AC} = 15cm$, $\overline{AD} = 16$ i $\overline{BD} = 12$, determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{AB} = 20$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ són semblants ja que:
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$.
Aleshores, $\angle DAB = \angle ABC$.

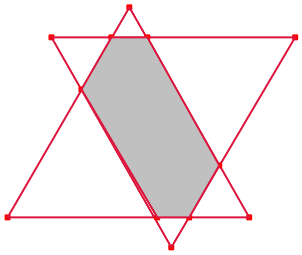
Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és isòsceles $\overline{AE} = \overline{BE}$.
Notem que $\angle CAE = \angle ACE$.

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és isòsceles $\overline{AE} = \overline{CE}$.
Aleshores E és el punt mig del segment $\overline{BC}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2} = \frac{1}{2}\frac{20\cdot 15}{2} = 75cm^2.$$

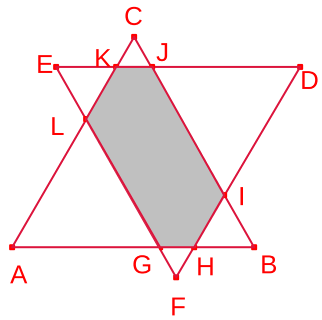
468.- Donats dos triangles equilàters de perímetre 36cm cadascun, són superposats de forma que la regió comuna és un hexàgon amb els costats paral·lels, com els de la figura.
Calculeu el perímetre de la figura.



Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ de perímetre 36 i costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{DE}$.

$\overline{AB} = \overline{DE} = 12$.



$\overline{LG}$ és paral·lel a $\overline{BC}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AGL}$ és equilàter:

$\overline{LG} = \overline{AG}$.

$\overline{HI}$ és paral·lel a $\overline{AC}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BHI}$ és equilàter:

$\overline{HI} = \overline{HB}$.

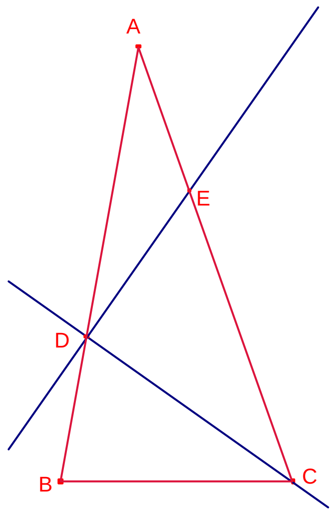
$\overline{LG} + \overline{GH} + \overline{HI} = \overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HB} = \overline{AB} = 12$.

Anàlogament, $\overline{LK} + \overline{KJ} + \overline{JI} = \overline{EK} + \overline{KJ} + \overline{JD} = \overline{DE} = 12$.

El perímetre de l'hexàgon és:

$P_{GHIJKL} = \overline{LG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{LK} + \overline{KJ} + \overline{JI} = \overline{AB} + \overline{DE} = 12 + 12 = 24\,\text{cm}$.

469.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $B - A = 50^o$.
La bisectriu del vèrtex C intersecta el costat $\overline{AB}$ en el punt D.
Siga el punt E del costat $\overline{AC}$ tal que $\angle CDE = 90^o$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ADE$.



Solució:

$B = 50^o + A$.

$C = 180^o - (A + B) = 130^o - 2A$.

$\angle BCD = \dfrac{C}{2} = 65^o - A$.

$\angle BDC = 180^o - (B + \angle BCD) = 180^o - (50^o + A + 65^o - A) = 65^o$.

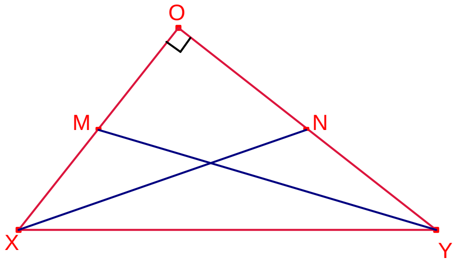
$\angle ADE = 180^o - (\angle BDC + \angle CDE) = 180^o - (65^o + 90^o) = 25^o$.

470.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OXY}$, $O = 90º$.

Siguen M, N els punts migs dels catets $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, respectivament.

Si $\overline{XN} = 19$ i $\overline{YM} = 22$.

Determineu la mesura del segment $\overline{XY}$.



Solució:

Siga $x = \overline{OY}$, $y = \overline{OX}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OXY}$:

$$\overline{XY} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OXN}$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 19^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OYM}$:

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 22^2 \qquad (3)$$

Sumant les expressions (2) (3):

$$\frac{5}{4}\left(x^2 + y^2\right) = 19^2 + 22^2 \qquad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 676 \qquad (5)$$

Substituint l'expressió (5) en l'expressió (1):

$$\overline{XY} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{676} = 26 .$$