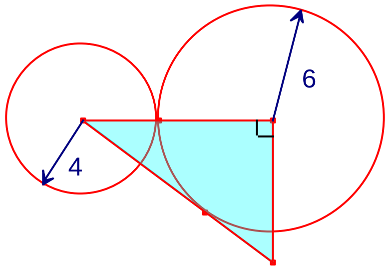
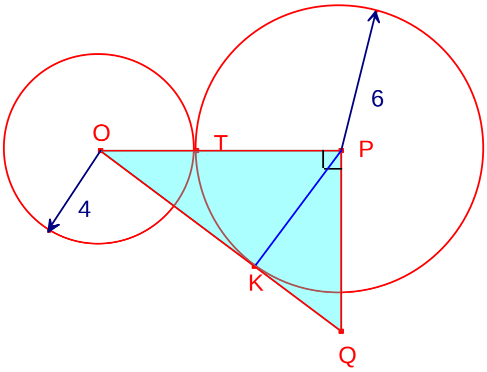
4691.- La figura està formada per dues circumferències tangents exteriors de radis 4, 6. Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.



Solució:



Teorema Pitpagores OKP

OK=8

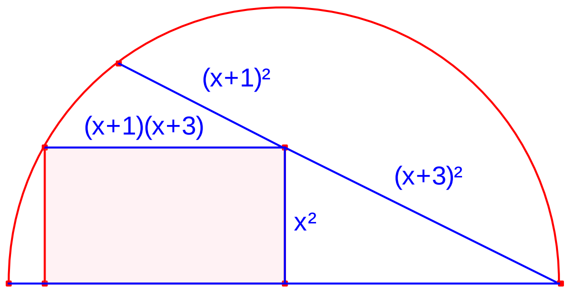
Els triangles rectangles OKP, PKQ són semblants

PQ/6=10/8

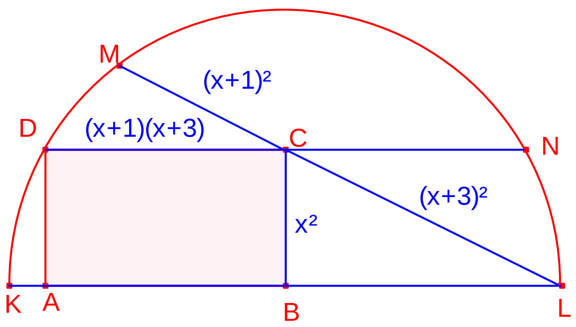
PQ=15/2

[OPQ]=(1/2)OP·PQ=75/2

4692.- La figura està formada per un semicercle que conté un rectangle i una corda.
Calculeu el valor x

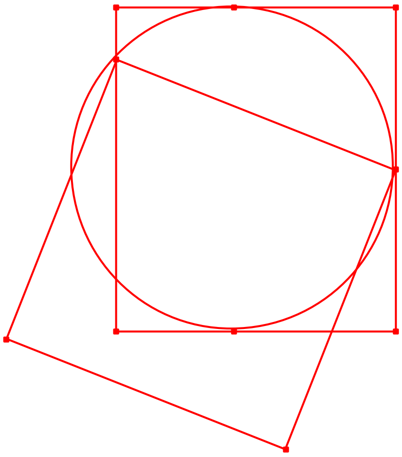


Solució:

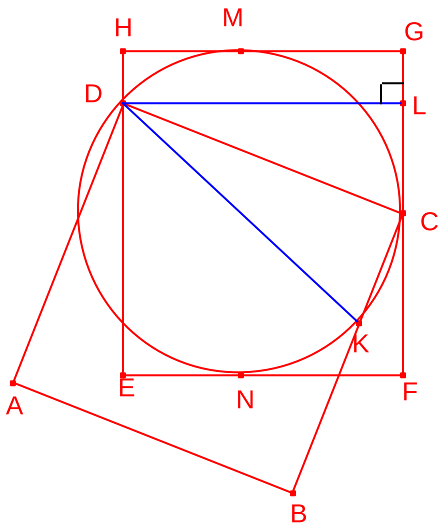


Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = (x+1)(x+3), \overline{BC} = x^2$
Aplicant la potència de C respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{KL}$:
$\overline{DC} \cdot \overline{CN} = \overline{MC} \cdot \overline{LC}$
$(x+1)(x+3) \cdot \overline{NC} = (x+1)^2(x+3)^2$
$\overline{NC} = (x+1)(x+3)$
Aleshores, B és el centre del semicercle.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBL}$:
$\overline{BL} = \overline{BD} = \sqrt{(x+3)^4 - x^4} = \sqrt{12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$(x+1)^2(x+3)^2 + x^4 = 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$
$x^4 - 2x^3 - 16x^2 - 42x - 36 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 6$

4693.- La figura està formada per un quadrat, un rectangle i un cercle que se superposen parcialment. Un vèrtex quadrat coincideix amb un punt de tangència del rectangle i el cercle. Demostreu que l'àrea del quadrat és igual a la del rectangle.



Solució:



AB=BC=c

CG=GM=a

CF=NF=b

MH=NE=d

angleDCL=angleDKC

Els triangles DLC, DCK semblants

(a+d)/c = c/(a+b)

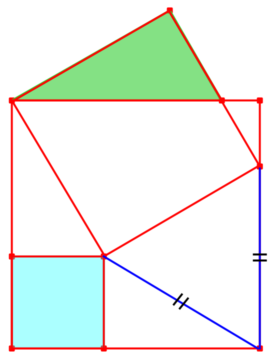
(a+d)(a+b)=c²

[ABCD]=c²

[EFGH]=(a+d)(a+b)

[ABCD]=[EFGH]F

4694.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.

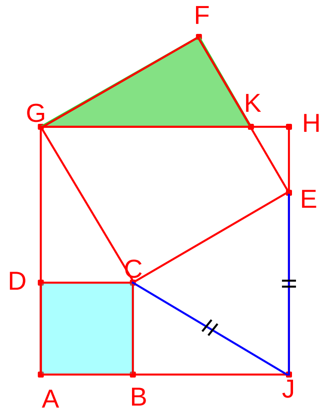


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GDC}, \overset{\Delta}{JBC}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CE} = \overline{CJ} = \overline{EJ}$

El triangle $\overset{\Delta}{CEJ}$ és equilàter.
$\angle BDJ = 60°, \overline{CE} = 2$

Aplicant el teorema de tales al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GDC}$:
$\overline{DG} = \sqrt{3}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GDC}, \overset{\Delta}{GFK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FK}}{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GFK}$ és:

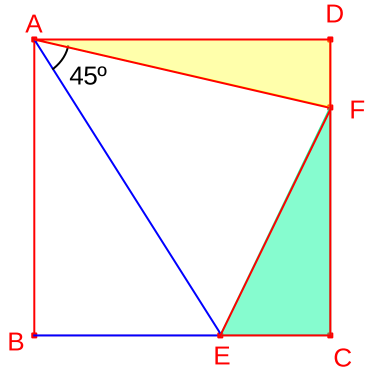
$$S_{GFK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

La proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GFK}$ és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{GFK}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4695.- La figura està formada per un quadrat i dos segments que formen 45º.
Proveu que

$$\frac{S_{ECF}}{S_{ADF}}=\frac{2\cdot\overline{BE}}{\overline{BC}}$$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=1$
Siga $\overline{CE}=x, \overline{CF}=y$
Siga $\alpha=\angle BAE, \angle DAF=45-\alpha$

$\overline{BE}=1-x, \overline{DF}=1-y$
$\tan\alpha=1-x, \tan(45°-\alpha)=1-y$

$$1-y=\tan(45°-\alpha)=\frac{\tan 45°-\tan\alpha}{1+\tan 45°\cdot\tan\alpha}=\frac{1-(1-x)}{1+1-x}=\frac{x}{2-x}$$

$$y=1-\frac{x}{2-x}=\frac{2(1-x)}{2-x}$$

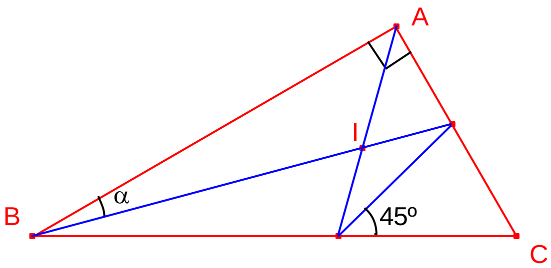
$$S_{ECF}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\frac{2x(1-x)}{2-x}$$

$$S_{ECF}=\frac{1}{2}(1-y)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2(1-x)}{2-x}\right)=\frac{1}{2}\frac{x}{2-x}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ECF}}{S_{ADF}}=\frac{\frac{2x(1-x)}{2-x}}{\frac{x}{2-x}}=2(1-x)=\frac{2\cdot\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

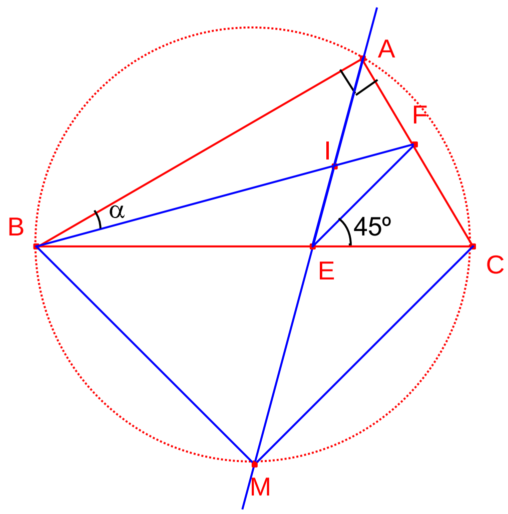
4696.- En la figura , el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle
$A = 90°$.
El punt I és l'incentre del triangle.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Per ser el punt I l'incentre $\angle CBF = \angle ABF = \alpha$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{CF}}{a} = \frac{b - \overline{CF}}{c} = \frac{b}{a+c}$$

$$\overline{CF} = \frac{ab}{a+c}, \overline{AF} = \frac{bc}{a+c}$$



La bisectriu de l'angle recte del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ talla la circumferència circumscrita en el punt M.

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$\angle AEF = 2\alpha$
$\angle AMC = 2\alpha$
Aleshores, els segments $\overline{EF}, \overline{MC}$ són paral·lels.
Els triangles $\overset{\Delta}{AEF}, \overset{\Delta}{AMC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\frac{bc}{a+c}}{b}$$

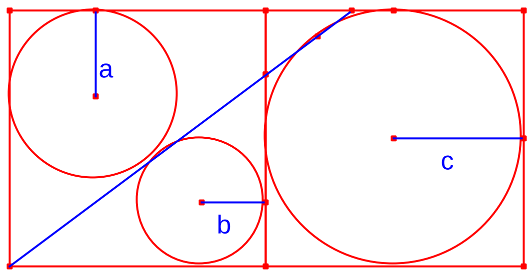
$$\overline{EF} = \frac{ac}{a+c}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ECF}$:

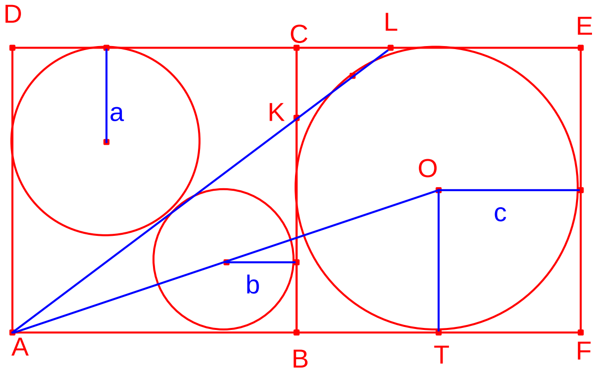
$$\frac{\frac{ac}{a+c}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{c}{a}} = \frac{\frac{ab}{a+c}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Simplificant:
$a = 2b$
Aleshores, $2\alpha = 30°$
$\alpha = 15°$

4697.- La figura està formada per dos quadrats iguals i tres circumferències de radis a, b, c.
Calculeu les proporcions $a : b : c$



Solució:



AB=2

c=1

angleOAT=x

angleLAT=2x

tan x=1/3

tan(2x)=3/4

AK/2=3/4

BK=3/2, AK=5/2

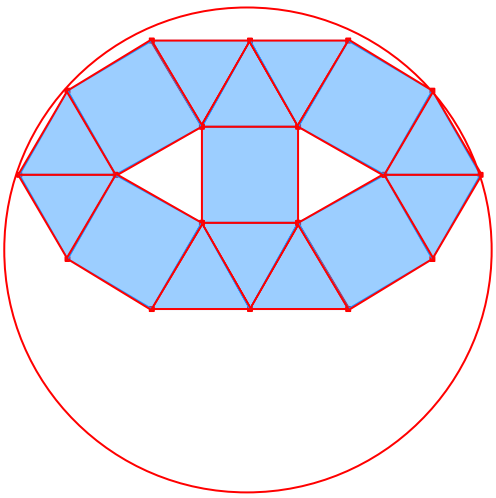
b=(AB+BK-AK)/2=1/2

Els triangles ABK, LDA semblants

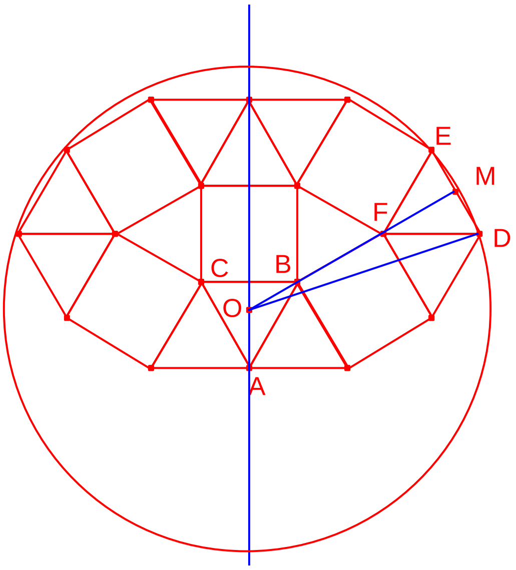
a/b=AD/BK=4/3

a : b : c = 4 : 3 : 6

4698.- La figura està formada per un cercle que conté triangles equilàters i quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea ombrejada.



Solució:



Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{AB} = 1$

El centre de la circumferència és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga $\overline{OD} = r$ el radi.
Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BF} + \overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 + 5\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{DM} = \frac{1}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMD}$:

$$r^2 = \left(\frac{6 + 5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{3}(2 + \sqrt{3})$$

L'àrea del cercle és:

$$S_{cercle} = \pi r^2 = \frac{5\pi}{3}(2 + \sqrt{3})$$

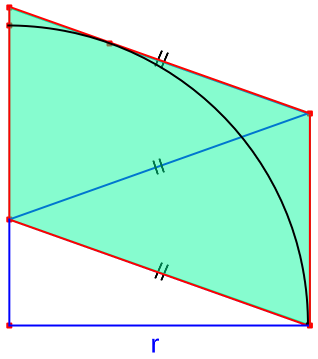
L'àrea ombrejada està formada per cinc quadrats i 10 triangles equilàters de costat 1.
La seua àrea és:

$$S_{ombrejada} = 5 \cdot 1^2 + 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{3})$$

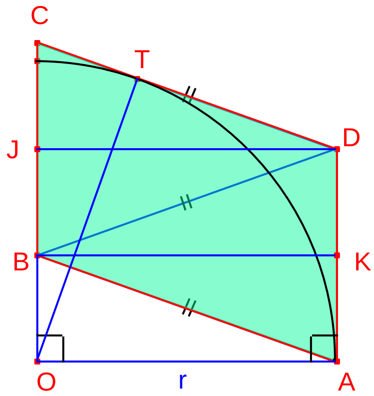
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{cercle}}{S_{ombrejada}} = \frac{\frac{5\pi}{3}(2 + \sqrt{3})}{\frac{5}{2}(2 + \sqrt{3})} = \frac{2\pi}{3}$$

4699.- Un quadrilàter verd del qual dos costats són tangents a un quadrant de radi r. Calculeu la seua àrea



Solució:



ABCD paral·lelogram

OB=a, AD=2a

DA=DT=2a

Els triangles BOA, CTO, CJD iguals

CT=OB=a

AB=CD=2a+a=3a

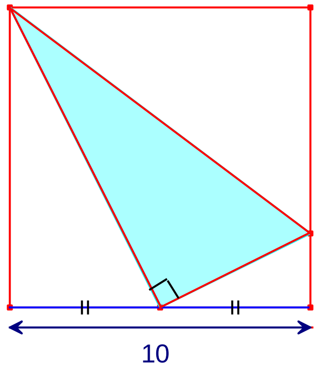
Teorema Pitagores BOA

$(3a)^2=r^2+a^2$

a=(sqrt(2)/4)r

[ABCD]=2a·r=(sqrt(2)/2)r^2

4700.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 que conté un triangle rectangle.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAM}, \overset{\Delta}{MBN}$ són semblants i de raó $2:1$

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DM}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAM}$:

$\overline{DM} = 5\sqrt{5}$

L’àrea del triangle ombrejat és:

$S_{DMN} = \frac{1}{4}\overline{DM}^2 = \frac{125}{4}$