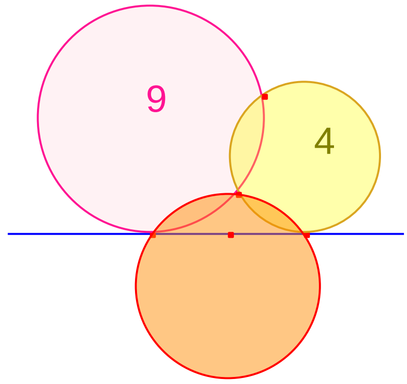
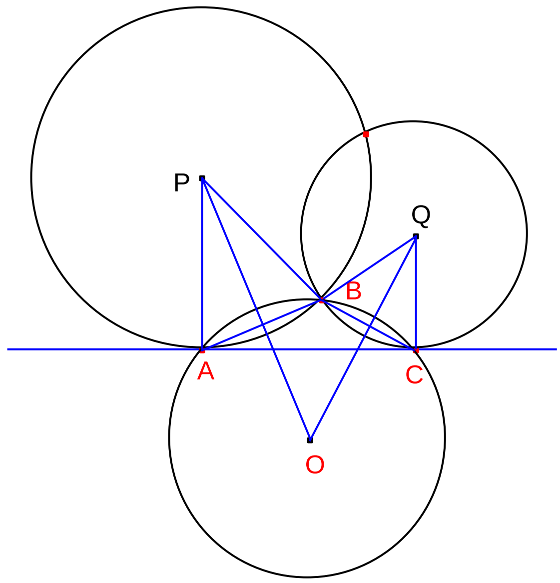
4711.- Dues circumferències secants de radis 9 i 4 són tangents a una recta.
Calculeu l'àrea de la tercera recta que passa pels punts de tangència i un punt d'intersecció.



Solució:
Siga la circumferència de centre P àrea 9 i radi
$\overline{PA} = \overline{PB} = a = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$
Siga la circumferència de centre Q àrea 4 i radi $\overline{QC} = \overline{QB} = b = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Siga $\angle APO = \angle BPO = \angle BAC = \alpha$
Siga $\angle CQO = \angle BBQ = \angle BCA = \beta$
Siga $\overline{AB} = y, \overline{BC} = x$

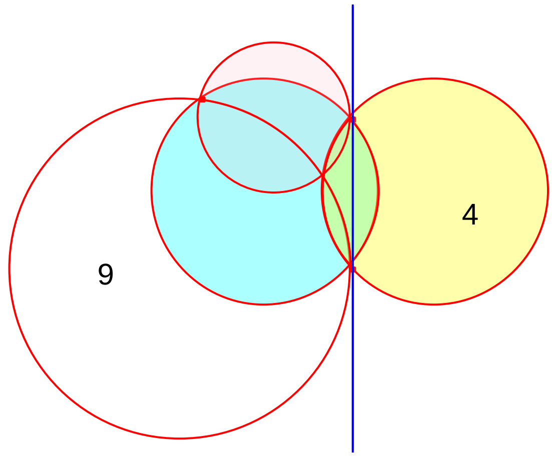


$\sin\alpha = \frac{y}{2a}, \sin\beta = \frac{x}{2b}$
Siga $\overline{OA} = r$ radi de la tercera circumferència.

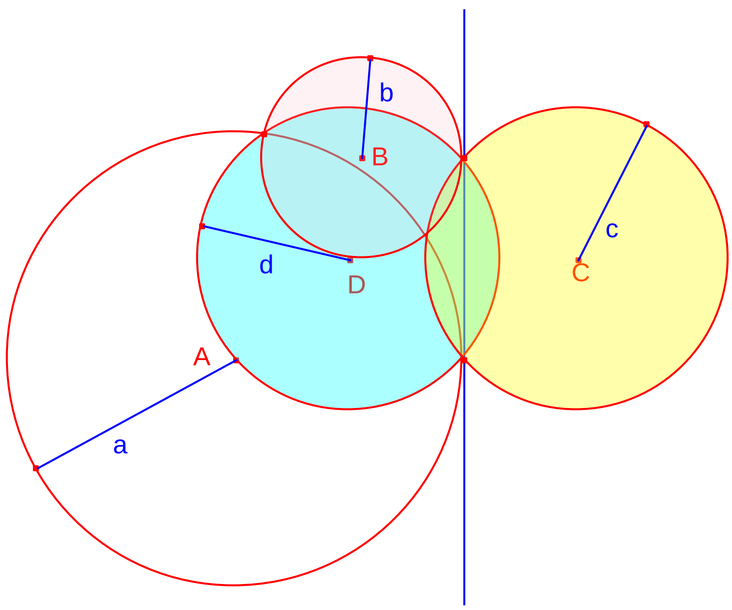
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\alpha} = 2r$

$\frac{y}{\frac{x}{2b}} = \frac{x}{\frac{y}{2a}} = 2r$
$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{a}{b}$
$r = b \cdot \frac{y}{x} = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$
L'àrea del tercer cercle és:
$S_O = \pi \cdot ab = 6$

4712.- Quatre circumferències
Dues són tangents a una recta.
Es donen les àrees de dos cercles 9, 4.
Calculeu l'àrea dels altres dos cercles.

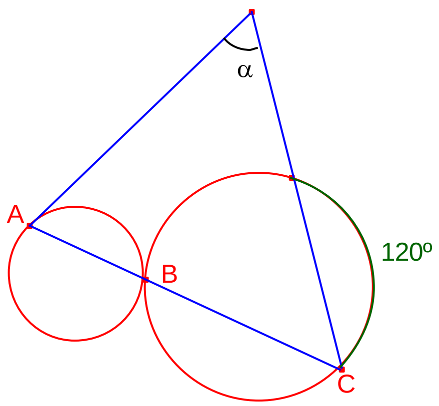


Solució:
Aprofitant el problema anterior:

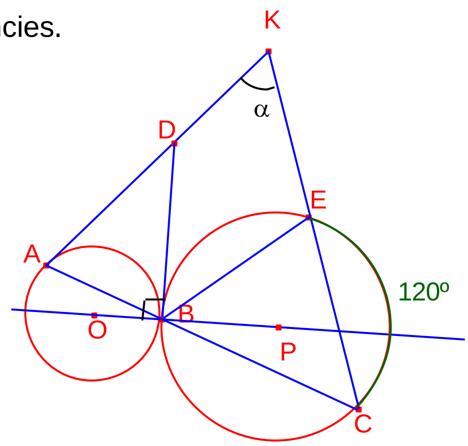


c=d=sqrt(ab)
ab=c²
[reed]=16/9
[Blue]=[Yelow]=4

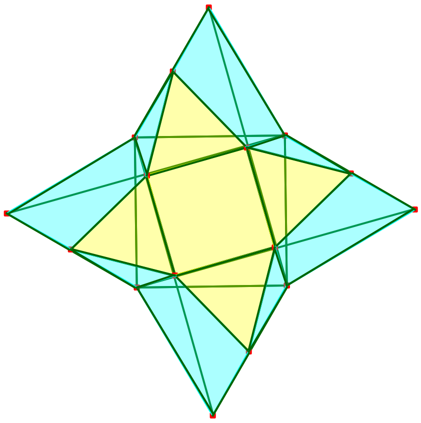
4713.- En la figura els punts A, B són de tangència.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Siga $\angle DAC = \beta$
Sigue O, P els centres de les circumferències.
Siga D tal que $\angle OBD = 90°$
$\angle EBC = 60°$
$\angle ABE = 120°$
$\overline{AD} = \overline{DB}$
$\angle ABD = \beta$
$\angle DBE = 120° - \beta$
$\angle BCE = \angle DBE = 120° - \beta$
$\alpha = \angle AKC = 60°$

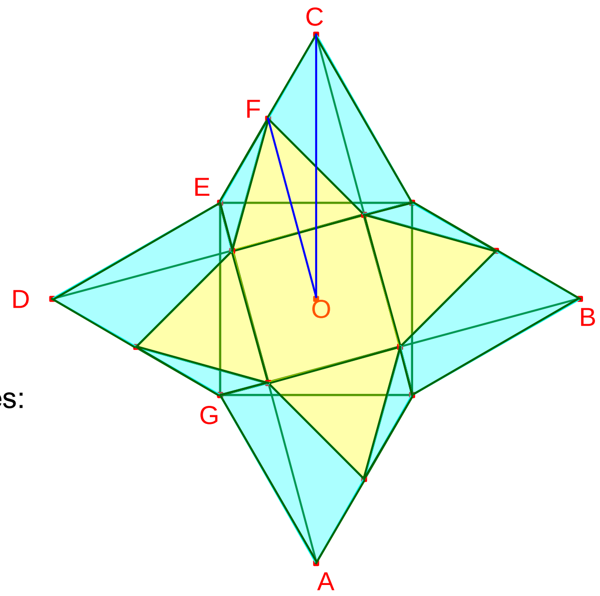


4714.- En la figura, calculeu la proporció entre l’àrea groga i l’àrea blava.



Solució:
L’estrella groga i l’estrella exterior són semblants i de raó:

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}$$



Els segments $\overline{GE}, \overline{OC}$ són paral·lels.
Els segments $\overline{AE}, \overline{OF}$ són paral·lels.
Aleshores, $\angle FOC = \angle GEA = 15°$
$\angle FCO = 30°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OFC}$:

$$\frac{OC}{\sin 135°} = \frac{\overline{OF}}{\sin 30°}$$

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

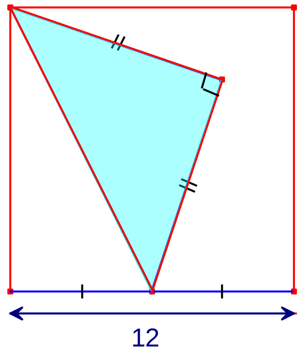
La proporció entre l’àrea groga i l’àrea exterior és:

$$\frac{[Groga]}{[Groga] + [Blava]} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Aleshores:

$$\frac{[Groga]}{[Blava]} = 1$$

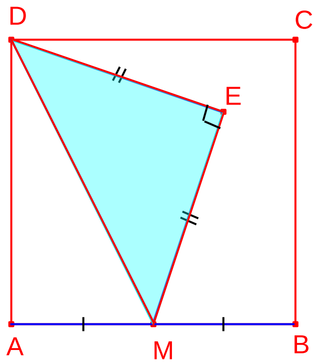
4715.- La figura està formada per un quadrat de costat 12.
Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.



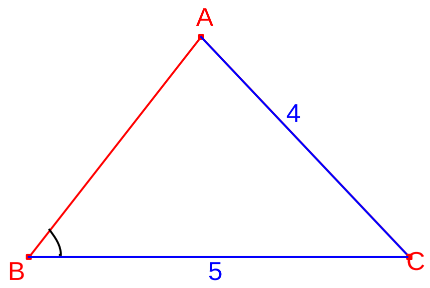
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 12$
$\overline{AM} = 6$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAM}$:
$\overline{DM}^2 = 180$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEM}$ és:
$S_{DEM} = \frac{1}{4}\overline{DM}^2 = 45$



4716.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a=5, b=4, \cos(A-B)=\frac{7}{8}$
Calculeu $\cos C$



Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{5}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}, \sin A=\frac{5}{4}\cdot\sin B$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\cos A=\frac{-9+c^2}{8c}, \cos B=\frac{9+c^2}{10c}$$

$$\frac{7}{8}=\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$$

$$\frac{7}{8}=\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\frac{5}{4}(1-\cos^2 B)$$

$$\frac{7}{8}=\frac{-9+c^2}{8c}\cdot\frac{9+c^2}{10c}+\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{9+c^2}{10c}\right)^2\right)$$

Simplificant:

$$\frac{3(2c^2-27)}{40c^2}=0$$

Resolent l'equació:

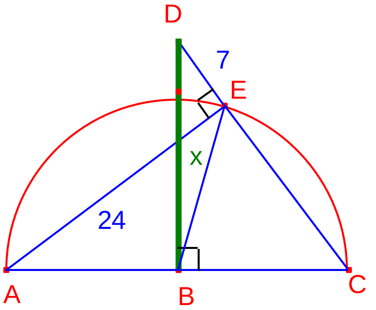
$$c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

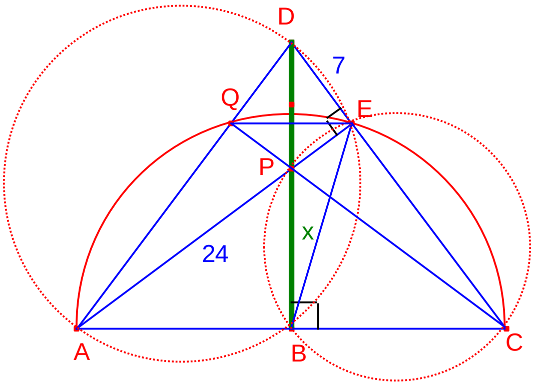
$$\frac{27}{2}=41-40\cdot\cos C$$

$$\cos C=\frac{11}{16}$$

4717.- En la figura calculeu la mesura del segment
$x = \overline{BD}$



Solució:



angleEAC=a

BCEP cíclic

ABED cíclic

CP altura ACD

anglePBE=angleDAE=b

B centre de la circumferència de diàmetre AC

angleEQC=a

AD=CD=sqrt(24²+7²)=25

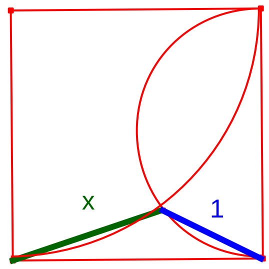
CE=25-7=18

AC=sqrt(24²+18²)=30

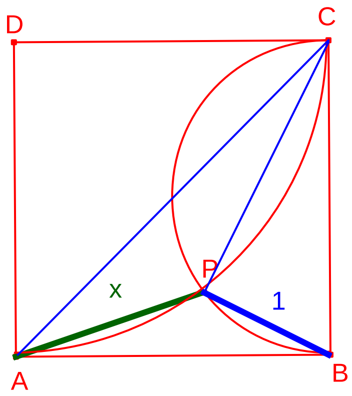
AB=15

x=sqrt(25²-15²)=20

4718.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i un semicercle.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



AB=c

AC=c·sqrt(2)

anglePCB=a

angleAPC=135º

angleACP=45º-a

angleCPA=a

anglePAC=45º-a

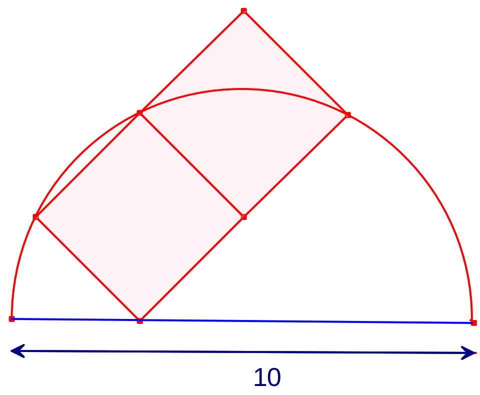
angleABP=a

Els triangles APB, CPA són semblants

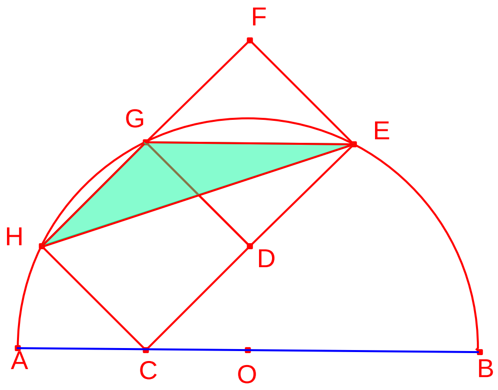
x/1=c·sqrt(2)/c

x=sqrt(2)

4719.- La figura està formada per una semicircumferència de de diàmetre 10 i dos quadrats iguals.
Calculeu l'àrea ombrejada.

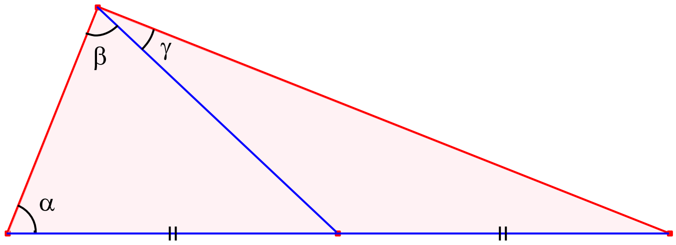


Solució 1:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r = 10$
Siga el quadrat $CDGH$ de costat $\overline{CD} = c$
$\overline{GE} = c\sqrt{2}, \overline{HE} = c\sqrt{5}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EGH}$ és:
$$S_{EGH} = \frac{1}{2}c^2 = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{GE} \cdot \overline{HE}}{4r} = \frac{c \cdot c\sqrt{2} \cdot c\sqrt{5}}{4r}$$
$$c = \frac{2}{\sqrt{10}}r$$
L'àrea del rectangle $CEFH$ és:
$$S_{CEFH} = 2c^2 = \frac{4}{5}r^2 = 20$$

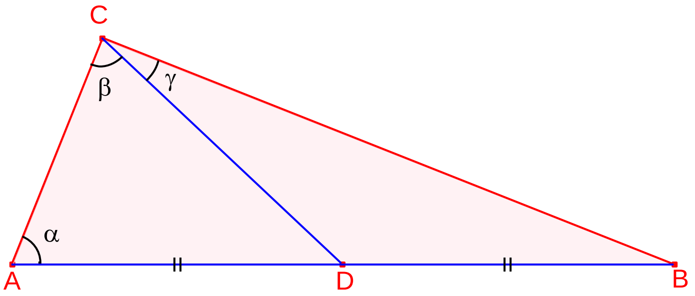


Solució 2:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r = 10$
$\angle HGE = 135°$
$\overline{HE} = c\sqrt{5}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EGH}$:
$$\frac{c\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$
$$c = \frac{2}{\sqrt{10}}r$$
L'àrea del rectangle $CEFH$ és:
$$S_{CEFH} = 2c^2 = \frac{4}{5}r^2 = 20$$

4720.- El triangle ombrejat de la figura no és isòsceles,
Si $\alpha + \gamma = 90°$, calculeu $\beta + \gamma$



Solució:



$\gamma = 90 - \alpha$
$\angle ABC = 90° - \beta$
Siga $\overline{CD} = x, \overline{AD} = \overline{CD} = y$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DBC}$:
$$\frac{x}{\cos\beta} = \frac{y}{\cos\alpha}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$
$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$
$\alpha = \beta$, o bé $\beta = 90° - \alpha$

Si $\alpha = \beta$
aleshores, $\beta + \gamma = 90°$

Si $\beta = 90 - \alpha$
$\beta + \gamma = 180° - 2\alpha$, aleshores, $\angle ABC = \alpha$.
En aquest segon cas el triangle és isòsceles.