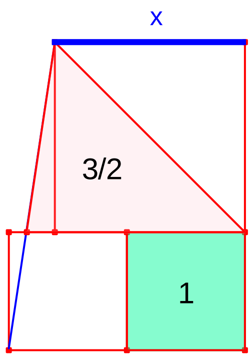
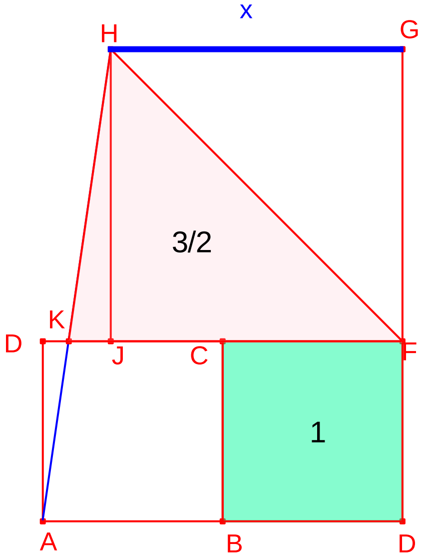
4721.- La figura està formada per tres quadrats. Si el triangle rosa té àrea 1,5 i l'àrea del quadrat verd 1, quina és la longitud del costat x



Solució:



AB=1, HG=x

KJ=y, DK=2-(x+y)

[KFH]=x(x+y)/2=3/2

x+y=3/x

Els triangles ADK, HJK semblants

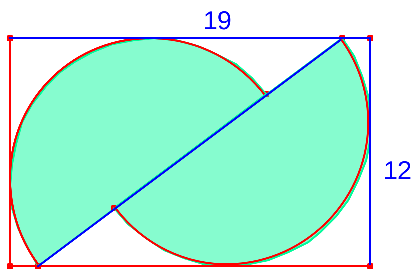
x/1 = y/(2-(x+y))=(x+y)/(3-(x+y))

x=(3/x)/(3-3/x)

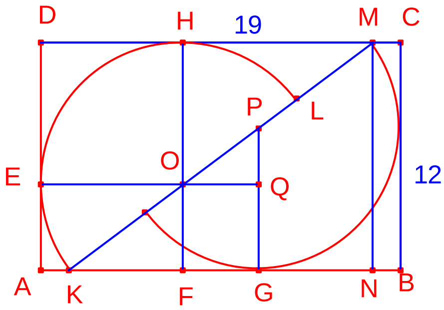
x^2-x-1=0

x=(1+sqrt(5))/2= Φ

4722.- La figura està formada per un rectangle de costats 19 i 12 que conté dues semicircumferències iguals.
Calculeu el diàmetre de les semicircumferències.

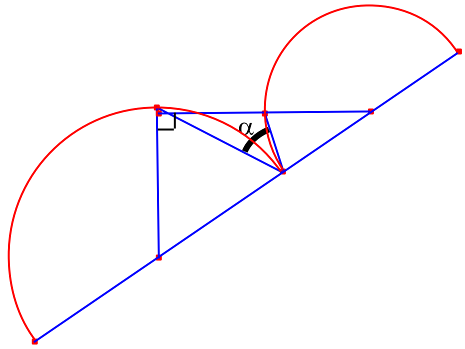


Solució:

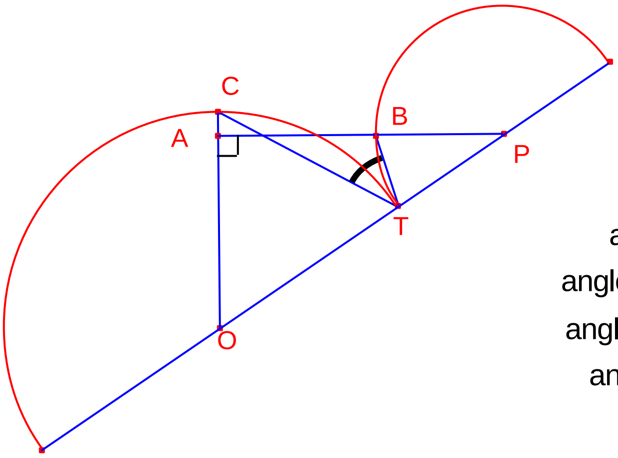


Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 19, \overline{BC} = 12$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = \overline{OP} = \overline{OE} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PG} = \overline{PM} = \overline{BG} = r$
$\overline{OA} = 19 - 2r, \overline{PQ} = 2r - 12$
$\overline{OF} = 12 - r, \overline{KF} = \sqrt{24r - 144}$
$\overline{AK} = r - \sqrt{24r - 144}$
$\overline{KN} = 19 - 2 \cdot \overline{AK} = 19 - 2r - 2\sqrt{24r - 144}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OQP}, \overset{\Delta}{KNM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2r - 12}{19 - 2r} = \frac{12}{19 - 2r - 2\sqrt{24r - 144}} = \frac{2r - 24}{2\sqrt{24r - 144}}$$
Elevant al quadrat i simplificant:
$4r^4 - 268r^3 + 4489r^2 - 29976r + 72720 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{15}{2}$$
El diàmetre de cadascuna de les semicircumferències és:
$2r = 15$

4723.- La figura està formada per dues semicircumferències.
Calculeu l'angle α



Solució:



angleCOP=x

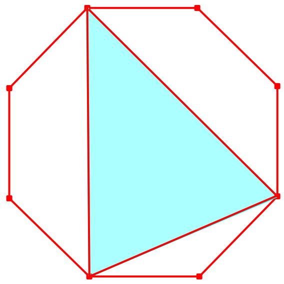
angleOPA=90º-x

angleOTC=angleOCT=90º-x/2

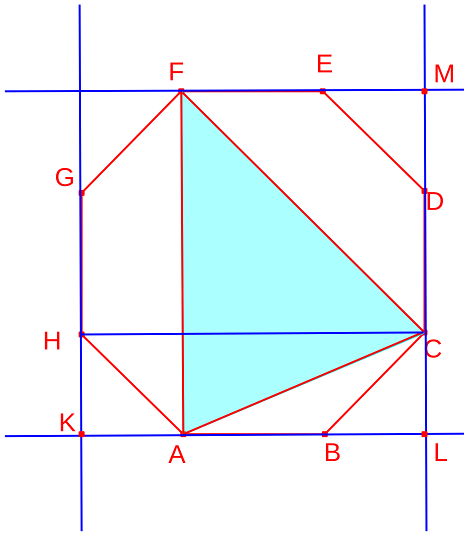
angleBTP=angleTBP=45º+x/2

angleCTB=45º

4724.- La figura està formada per un octògon regular Calculeu la proporció entre l’àrea del triangle ombrejat i l’àrea de l’octògon regular.



Solució:



AB=1

CL=DM=AK=sqrt(2)/2

AF=(1+sqrt(2)

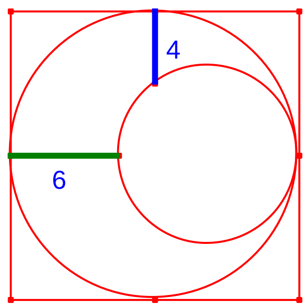
AL=(1+sqrt(2)/2)

[ACF]=AF·AL/2=(4+3·sqrt(2))/4

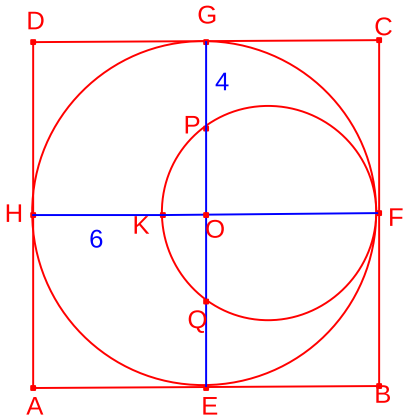
[ABCDEFGH]=(1+sqrt(2))^2-1=2+2·sqrt(2))

[ACF]/[ABCDEFGH]=(2+sqrt(2))/8

4725.- La figura està formada per un quadrat, la seua circumferència inscrita i una circumferència tangent interior a la inscrita
Calculeu el radi de la circumferència petita.



Solució:



AB=2c

KF=2r

OK=c-6, OF=c

OP=c-4, OC=c-4

Potència de O respecte de la circumferència petita

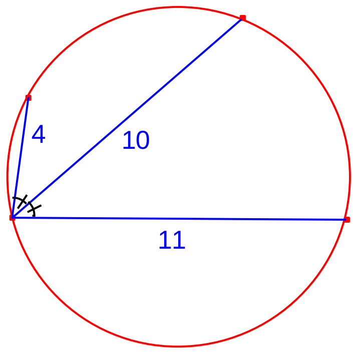
$(c-4)^2=(c-6)c$

c=8

2r=2c-5=10

r=5

4726.- La figura està formada per una circumferència, tres cordes amb un extrem comú de longituds 4, 10, 11. Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:

Siga $\alpha = \angle DAC = \angle CAB, \overline{BC} = \overline{CD} = a$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ACD}, \overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2 = 16 + 100 - 80 \cdot \cos\alpha$

$a^2 = 100 + 121 - 220 \cdot \cos\alpha$

Igualant les expressions:

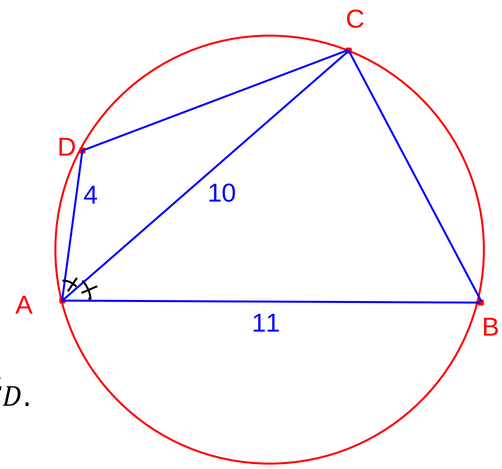
$116 - 80 \cdot \cos\alpha = 221 - 220 \cdot \cos\alpha$

Resolent l'equació:

$\cos\alpha = \frac{3}{4}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$a^2 = 116 - 80 \cdot \frac{3}{4} = 56$

$a = 214\sqrt{}$



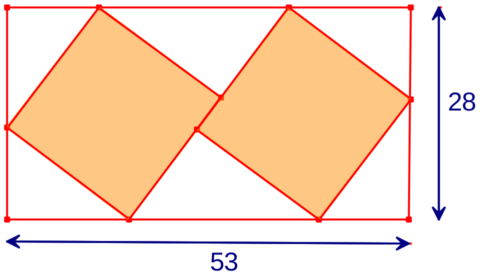
Siga r radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

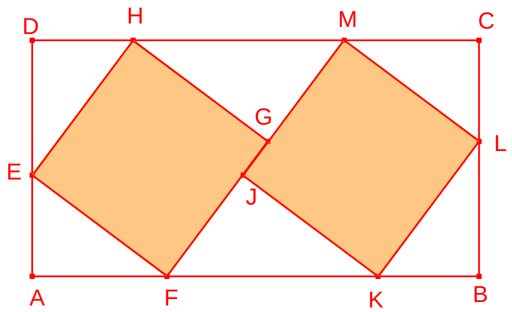
$$\frac{2\sqrt{17}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = 2r$$

$r = 4\sqrt{2}$

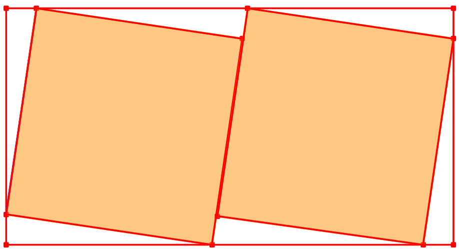
4727.- Un rectangle de costats 53, 28 conté dos quadrats iguals.
Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.



Solució:

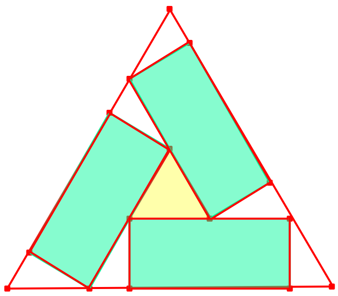


AB=53, AD=28
AE=DH=BK=CL=a
DE=AF=KJ=CM=28-a
EF=JK=c
FK=25
Els triangles rectangle EAF, FJK són semblants
$c/25=(28-a)/c$
Teorema Pitàgores EAF
$a^2+(28-a)^2=c^2$
$a=12$, $c=20$
[Groga]$=2c^2=800$



$a=7/2$, $c^2=1225/2$
[Groga]$=2c^2=1225$

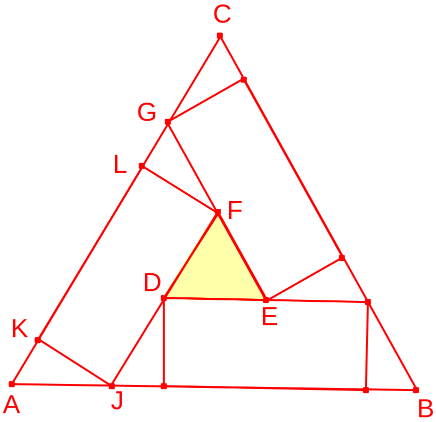
4728.- Un triangle equilàter conté tres rectangles iguals i un triangle equilàter ombrejat.
Si la suma de les àrees dels rectangles és màxima, calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = c$

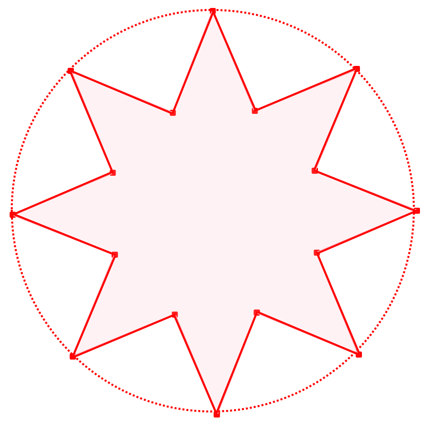


Siga $\overline{AK} = a$
$\overline{AJ} = 2a, \overline{KJ} = a\sqrt{3}$
$\overline{GL} = a, \overline{CG} = 2a$

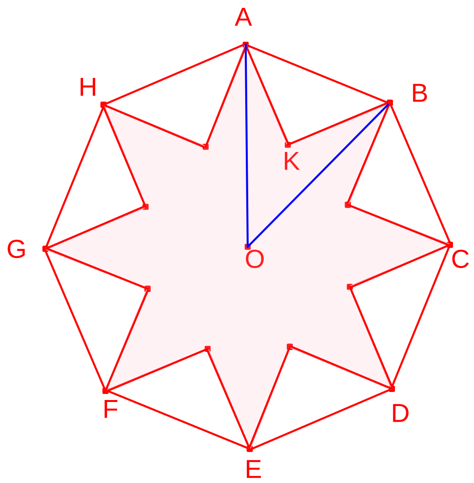
$\overline{KL} = 1 - 4a$
$c = \overline{DF} = 1 - 2a - 2a = 1 - 6a$

L'àrea del rectangle $JKLF$ és:
$S(a) = a\sqrt{3}(4 - a) = -\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}a$
La funció és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix en el vèrtex.
$a = \frac{1}{8}$
$c = 1 - 6a = \frac{1}{4}$
La proporció de les àrees dels dos triangles equilàters és:
$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = c^2 = \frac{1}{16}$

4729.- La figura està formada per un estel regular de 8 puntes inscrit en una circumferència de radi 1.
Calculeu el perímetre i l'àrea de la figura ombrejada.



Solució:



OA=1

angleAOB=45º

AB=x

AK=c

teorema cosinus OAB

x²=1+1-sqrt(2)=2-sqrt(2))

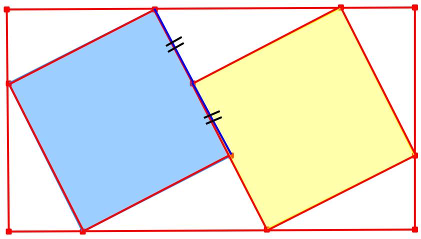
c=x·sqrt(2)/2

perímetre=16c=8·sqrt(4-2sqrt(2))

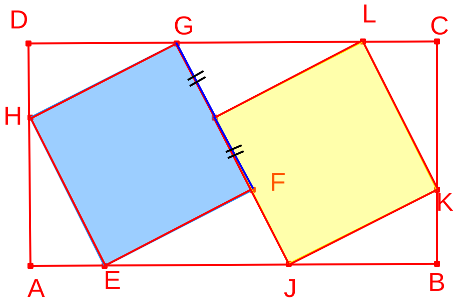
AF=(1+sqrt(2))·x

àrea=AF²-x²-4·c²=4·(sqrt(2)-1)

4730.- Un rectangle conté dos quadrats iguals. Calculeu proporció entre l'àrea ombrejada pels dos quadrats i l'àrea del rectangle.



Solució:



AB=a, BC=b

EF=2c

AE=x, AH=2x

$4c^2=5x^2$

a=3x+c·sqrt(5)=(11/2)x

[ombrejada]=$8c^2=10x^2$

[ABCD]=3x·(11/2)x=(33/2)x^2

[ombrejada]/[ABCD]=20/33