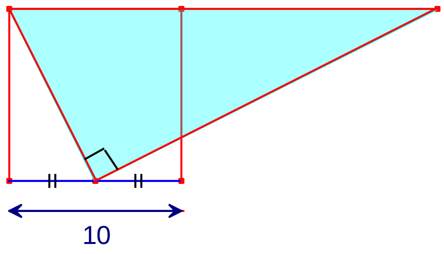
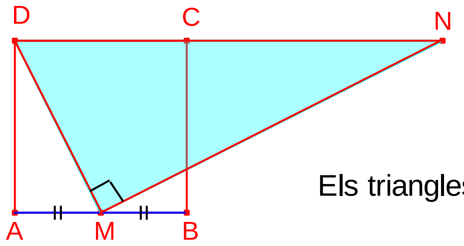
Problemes de Geometria per a l'ESO 474

4731.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i un triangle rectangle.
Calculeu l'àrea del triangle rectangle.



Solució:



AM=5, AD=10

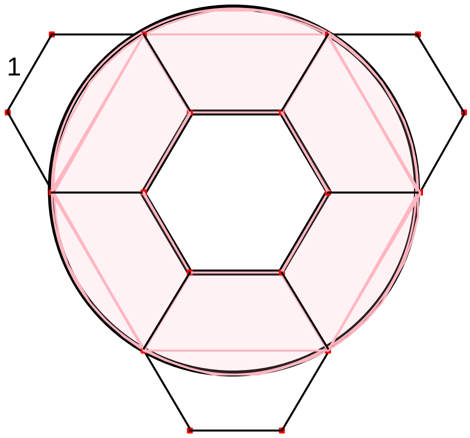
MD=5·sqrt(5)

Els triangles rectangles DAM, NMD són semblants

MN=2·MD=10·sqrt(5)

[DMN]=(1/2)·5·sqrt(5)·10·sqrt(5)=125

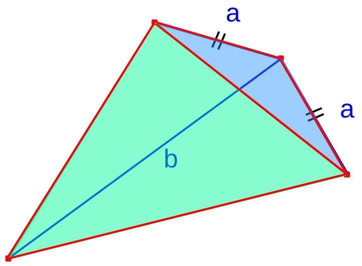
4732.- La figura està formada per tres hexàgons regulars de costat 1 i una circumferència. Calculeu l'àrea ombrejada.



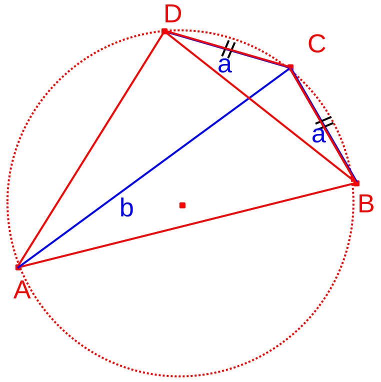
Solució:
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un cercle de radi 2 menys l'àrea d'un hexàgon regular de costat 1.

$$S_{ombrejada} = \pi \cdot 2^2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{8\pi - 3\sqrt{3}}{2} \approx 9.9683$$

4733.- La figura està formada per un quadrilàter cíclic i dues diagonals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle blau i l'àrea del quadrilàter.



Solució:



angleDAC=angleCAB=anglaCDB=angleDBC=x

BC=c, AD=e, AB=d

Teorema Tolomeu

ae+ad=bc

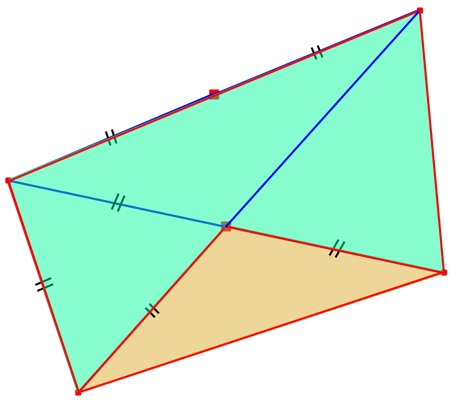
e+d=bc/a

[BCD]=(1/2)ac·sin x

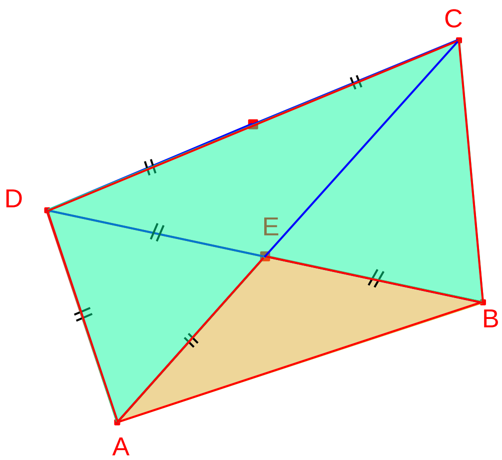
[ABCD]=(1/2)b(e+d)·sin x

[BCD]/[ABCD]=ac/(b(e+d))=a²/b²

4734.- La figura està formada per un quadrilàter i les seues diagonals.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.



Solució:



El triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és equilàter.
Siga $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{BE} = a$
$\overline{Cd} = 2a$
Siga $\overline{CE} = b$
L'àrea del pentàgon $AECBD$ és:

$$S_{AEBCD} = S_{ADE} + S_{CEB} + S_{DEC} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + 2ab)$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$

$$S_{ABE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

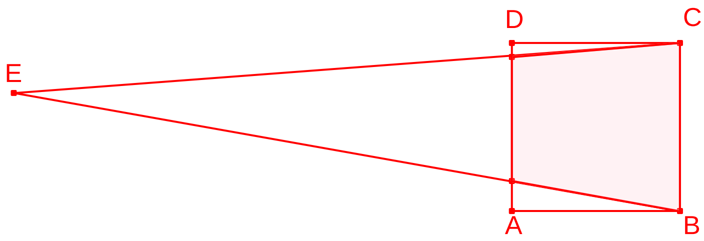
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DEC}$
$4a^2 = a^2 + b^2 + ab$
$b^2 + ab - 3a^2 = 0$
Resolent l'equació:

$$b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}a$$

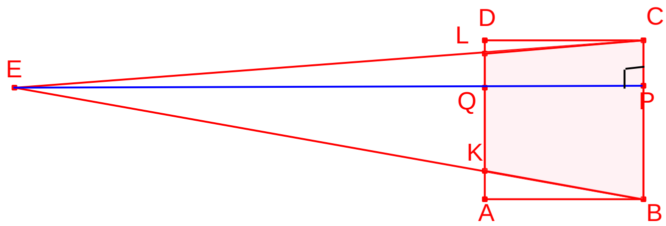
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{AEBCD}}{S_{ABE}} = \frac{a^2 + 2ab}{a^2} = \frac{a^2 + \left(-1 + \sqrt{13}\right)a^2}{a^2} = \sqrt{13}$$

4735.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$ d'àrea 16 i un triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ d'àrea 32.
Calculeu l'àrea del trapezi ombrejat.



Solució:



[ABCD]=16

AB=4

[BCE]=32

EP=16

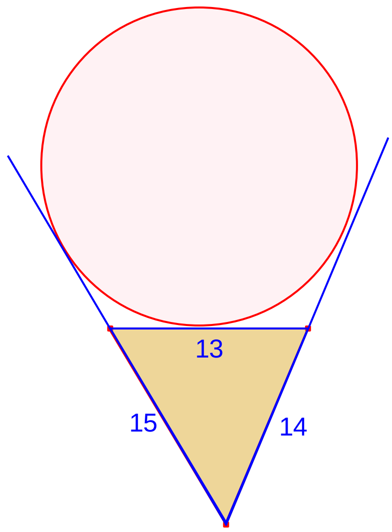
EQ=16-4=12

Els triangles BCE, KLE són semblants i de raó EP : EQ = 4:3

KL=(3/4)·4=3

[BCLK]=(4+3)/2·4=14

4736.- En la figura, calculeu el diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle ombrejat.



Solució:

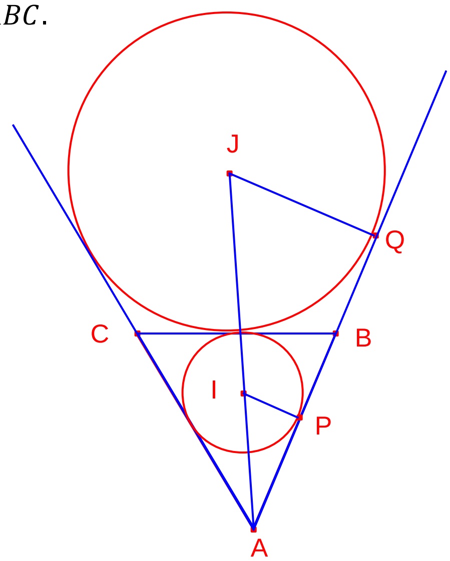
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 13, b = 15, c = 14$.

Siga $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$ semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $r = \overline{IP}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

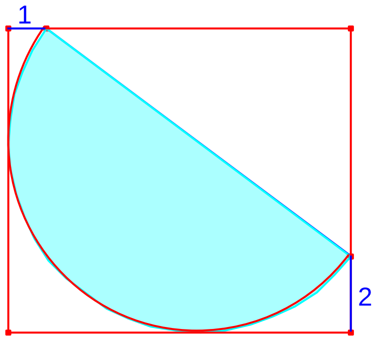
Siga $r_a = \overline{JQ}$ radi de la circumferència exinscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{AP} = p - a, \overline{AQ} = p$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{API}, \overset{\Delta}{AQJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p - a}$$

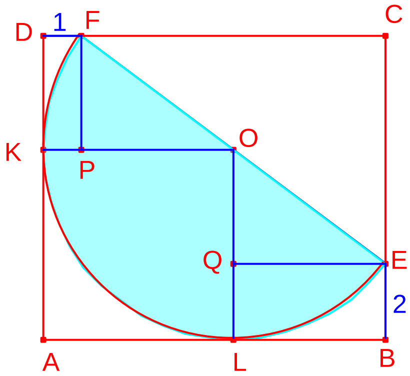


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r$
$\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 21 \cdot r$
$r = 4$
El radi de la circumferència exinscrita és:
$$r_a = \frac{21}{8} \cdot 4 = \frac{21}{2}$$
El diàmetre de la circumferència exinscrita és:
$3 \cdot r_a = 21$

4737.- La figura està formada per un rectangle que conté un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



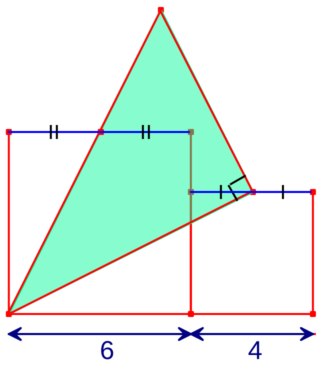
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OK} = \overline{OL} = r$
Siga $\overline{DK} = \overline{FP} = a$
$\overline{OP} = r - 1, \overline{OQ} = r - 2$



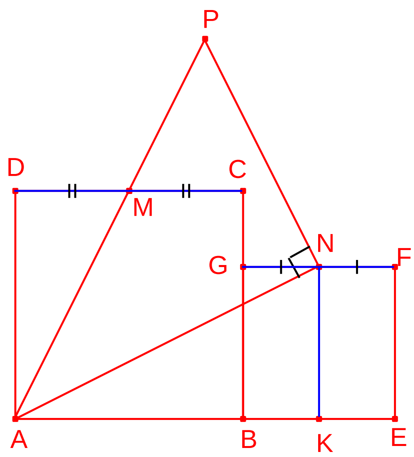
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FPO}, \overset{\Delta}{OQE}$ són iguals.
$a = r - 2$

Aplicant el teorema de Tales al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FPO}$:
$r^2 = (r-2)^2 + (r-1)^2$
Resolent l'equació:
$r = 5$
L'àrea del semicercle és:
$$S_O = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = \frac{25\pi}{2}$$

4738.- La figura està formada per dos quadrats i un triangle rectangle.
Calculeu l’àrea del triangle rectangle ombrejat.



Solució.



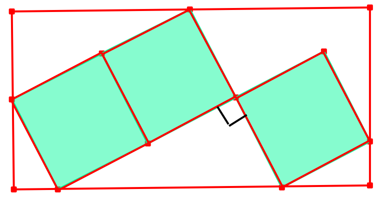
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{FG}$
Siga K el punt mig del costat $\overline{BE}$
$\overline{AK} = 8, \overline{KN} = 4$
$\overline{AD} = 6, \overline{DM} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKN}$:
$\overline{AN} = 4\sqrt{5}$

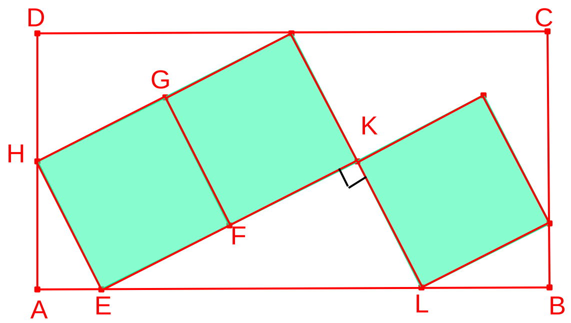
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKN}, \overset{\Delta}{ADM}$ són semblants.
Siga $\angle KAN = \angle DAM = \alpha$
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$
$\angle APN = 2\alpha$
Siga $x = \overline{PN}$
$\tan 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{x}, \tan 2\alpha = \frac{4}{3}$
$\frac{4\sqrt{5}}{x} = \frac{4}{3}$
Resolent l’equació:
$x = 3\sqrt{5}$

L’àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANP}$ és:
$S_{ANP} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 30$

4739.- La figura està formada per tres quadrats iguals inscrits en un rectangle. Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea total.



Solució:



$EF=c$

$AE=a,\ AH=2a,\ DH=a$

$5a^2=c^2$

$EL=c\cdot\text{sqrt}(5)$

$AB=(8/5)\text{sqrt}(5)\cdot c$

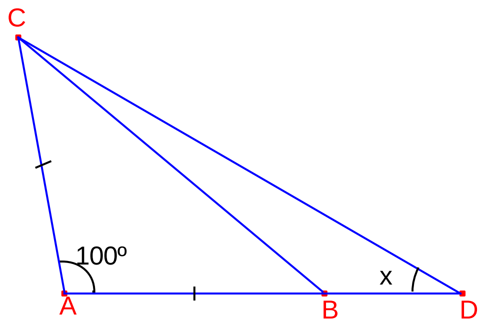
$AD=(4/5)\text{sqrt}(5)\cdot c$

$[\text{verda}]=3c^2$

$[ABCD]=(32/5)c^2$

$[\text{verda}]/[ABCD]=15/32$

4740.- En la figura, $\overline{AC} = \overline{AB}, \overline{BC} = \overline{AD}, \angle BAC = 100°$
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga $\overline{BC} = \overline{AD} = a, \overline{AC} = \overline{AB} = b$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin 100°} = \frac{b}{\sin 40°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{a}{\sin(80° - x)} = \frac{b}{\sin x}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{\sin(80° - x)}{2 \cdot \sin 50° \cdot \cos 50°} = \frac{\sin x}{\cos 50°}$$

$$\sin(80° - x) = 2 \cdot \sin 50° \cdot \sin x$$

$$\sin(80° - x) = \cos(50° - x) - \cos(50° + x)$$

$$\cos(10° + x) = \cos(50° - x) - \cos(50° + x)$$

$$\cos(10° + x) - \cos(50° - x) = -\cos(50° + x)$$

$$-2 \cdot \sin 30° \cdot \sin(-20 + x) = -\cos(50° + x)$$

$$\sin(-20° + x) = \cos(50° + x)$$

$$-20° + x = 90° - (50° + x)$$

$$x = 30°$$