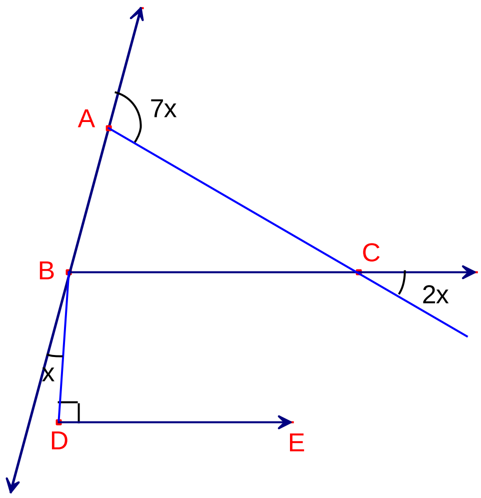
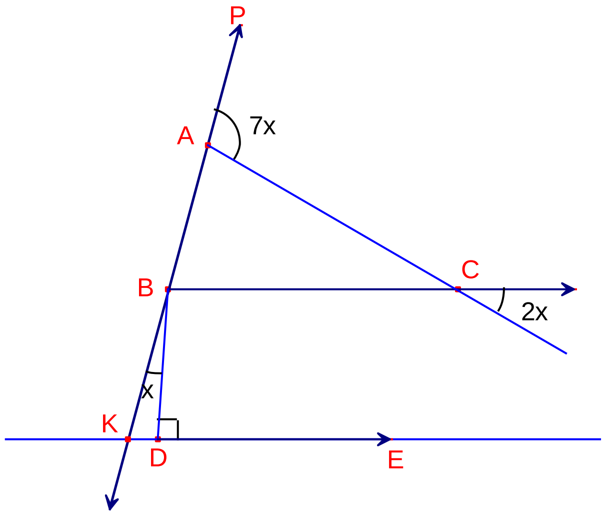
4741.- En la figura, els segments $\overline{BC}, \overline{DE}$ són paral·lels.
Calculeu la mesura de l'angle x



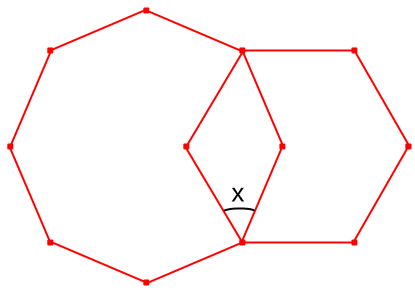
Solució:



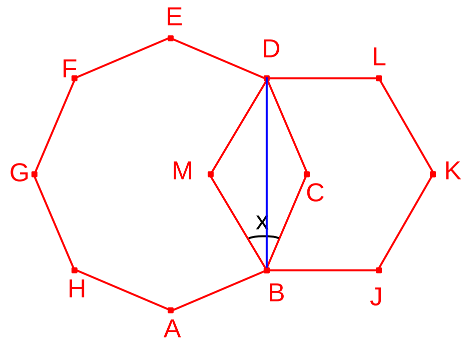
$\angle BKE = \angle ABC = 90° - x$
$\angle BCA = 2x$

$7x = \angle PAC = \angle ABC + \angle BCA = 90° - x + 2x$
$7x = 90° - x + 2x$
$x = 15°$

4742.- La figura està formada per un octògon regular i un hexàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle x



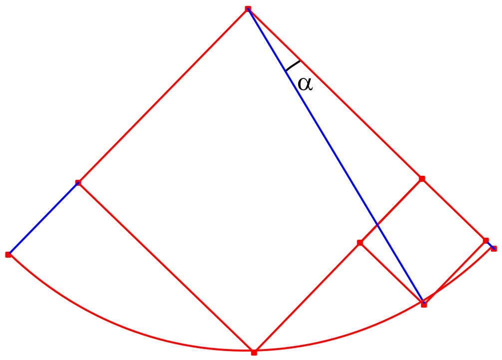
Solució:



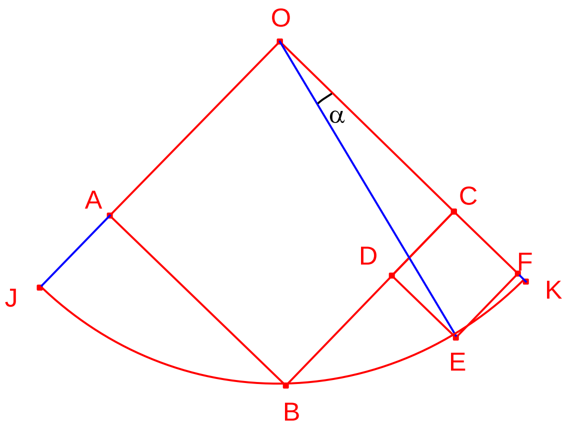
Siga $ABCDEFGH$ l'octògon regular.
$\angle BCD = 135°$
$\angle DBC = \dfrac{45°}{2}$
Siga $BJKLDM$ l'hexàgon regular.
$\angle BMD = 120°$
$\angle DBC = 30°$

$$x = \angle MBC = \angle DBC + \angle DBC = \frac{45°}{2} + 30° = \frac{105°}{2}$$

4743.- La figura està formada per un quadrant que conté dos quadrats. Calculeu la mesura de l'angle α

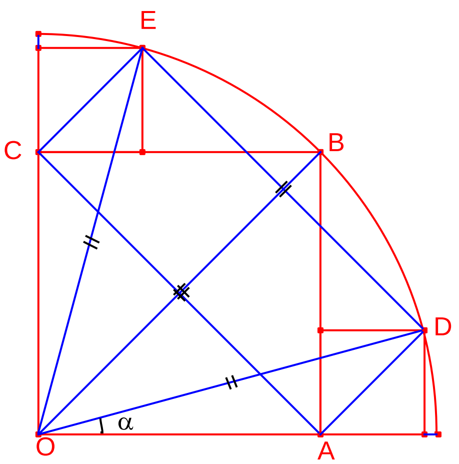


Solució 1:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OJ} = \overline{OB} = 1$
Siga el quadrat $OABC$ de costat $\overline{OA} = c$
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = d$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OAB}$:



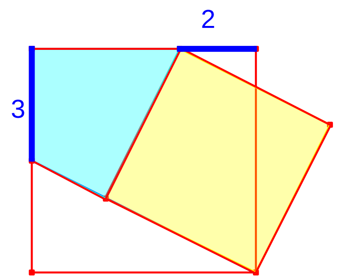
$2c^2 = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OFE}$:
$d^2 + (c+d)^2 = 1$
$2d^2 + c^2 + 2cd = 1$
$2d^2 + \sqrt{2}d - \frac{1}{2} = 0$
Resolent l'equació:
$d = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
$\sin\alpha = \frac{d}{1} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
$\alpha = 15°$

Solució 2 (No és meua)



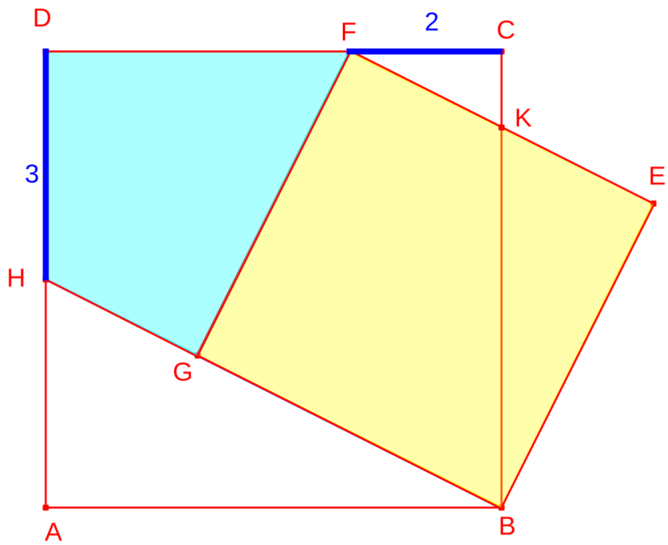
AC=OB=DE=OD=OE
AngleEOD=60º
angleAOD=angleCOE=15º

4744.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{BCF}$:
$2a^2 = 4 + c^2$



Siga $\overline{CK} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HAB}, \overset{\Delta}{KCF}$són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{2} = \frac{c-3}{c}$$

$$\overline{BK} = c - b = \frac{c^2 - 2c + 6}{c}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{2c^2 - 6c + 9}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HAB},\ \overset{\Delta}{KEB}$ són semblants.

$$\frac{ac}{c^2 - 2c + 6} = \frac{c}{\sqrt{2c^2 - 6c + 9}}$$

$$a = \frac{c^2 - 2c + 6}{\sqrt{2c^2 - 6c + 9}}$$

Elevant al quadrat:

$$a^2 = \frac{c^4 - 4c^3 + 16c^2 - 24c + 36}{2c^2 - 6c + 9}$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}c^2\right)(2c^2 - 6c + 9) = c^4 - 4c^3 + 16c^2 - 24c + 36$$

$$c^3 - \frac{15}{2}c^2 + 12c - 18 = 0$$

Resolent l'equació:

$$c = 6$$

$$S_{BEFG} = a^2 = \frac{1}{2}(4 + 36) = 20$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BH} = 3\sqrt{5}$$

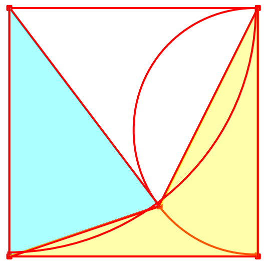
$$\overline{HG} = \sqrt{5}$$

$$S_{DFGH} = S_{HDF} + S_{HGF} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 11$$

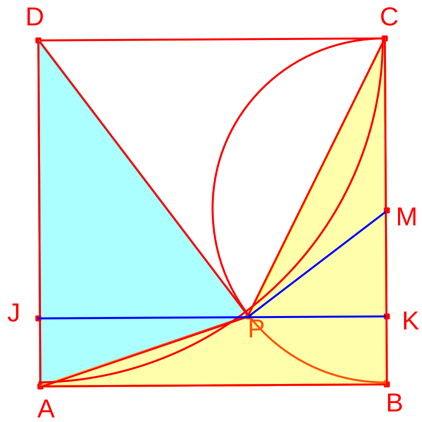
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DFGH}}{S_{BEFG}} = \frac{11}{20}$$

4745.- La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre el triangle blau i el quadrilàter groc.



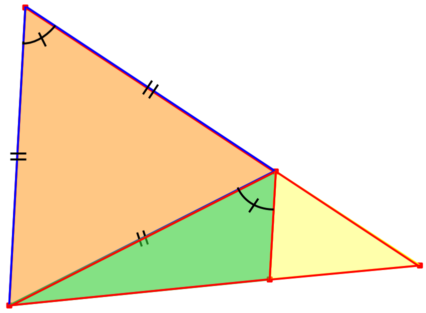
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga $\overline{AJ} = a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DJP}$:
$\overline{JP} = \sqrt{4a - a^2}$
siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKM}$:
$\overline{KP} = \sqrt{2a - a^2}$
$\sqrt{4a - a^2} + \sqrt{2a - a^2} = 2$
Resolent l'equació:
$a = \frac{2}{5}$
$\overline{JP} = \frac{6}{5}, \overline{KP} = \frac{4}{5}$
$S_{DJP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$
$S_{ABCP} = S_{ABP} + S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$
$\frac{S_{DJP}}{S_{ABCP}} = 1$

4746.- En la figura proveu la següent igualtat:

$$\frac{[Taronja]}{[Verda]} = 1 + \frac{[Verda]}{[Groga]}$$



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\angle ACB = \angle ABD = \angle DBE = 60°$

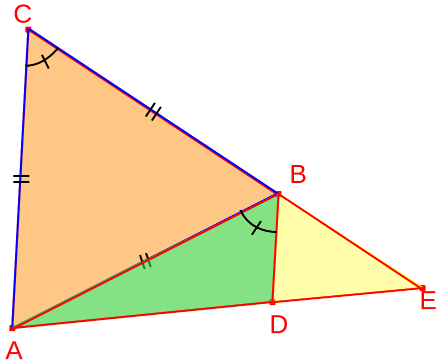
Siga $\overline{BE} = a$

$$\frac{[Taronja]}{[Verda] + [Groga]} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{[Verda]}{[Groga]} = \frac{1}{a}$$

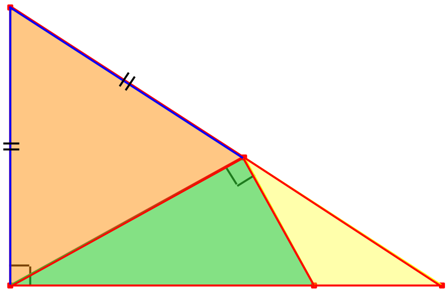
$$\frac{[Verda] + [Groga]}{[Taronja]} = \frac{[Groga]}{[Verda]}$$

$$\frac{[Taronja]}{[Verda]} = \frac{[Verda] + [Groga]}{[Groga]} = 1 + \frac{[Verda]}{[Groga]}$$



4747.- En la figura proveu la següent igualtat:

$$\frac{2\cdot[Taronja]}{[Verda]} = 1 + \frac{[Verda]}{[Groga]}$$



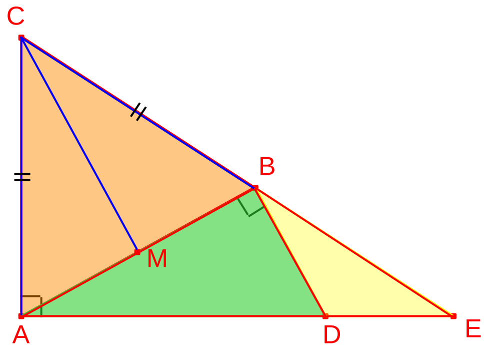
Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AC} = \overline{BC} = a, \overline{AB} = 2$

siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga $\alpha = \angle BCA = \angle BAD$

$\overline{CM} = \sqrt{a^2 - 1}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}, \overset{\Delta}{DBA}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BD} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}, \overline{AD} = \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{a}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2-2}{a^2}$$

$$\angle AEB = 90° - 2\alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEB}$:

$$\frac{\overline{BE}}{\sin\alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha}$$

$$\overline{BE} = \frac{2a}{a^2-2}$$

$$2\cdot[Taronja] = 2a\sqrt{a^2-1}\cdot\sin\alpha$$

$$[Verda] = \frac{1}{2}2\cdot\frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\sin\alpha$$

$$[Groga] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{2a}{a^2-2}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{2a}{a^2-2}\cdot\sin\alpha$$

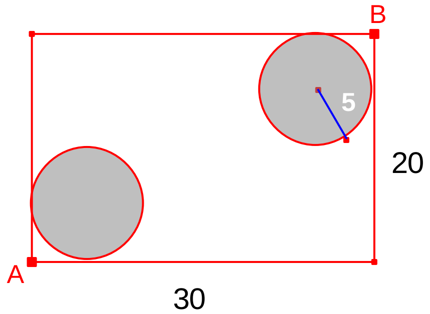
$$\frac{2\cdot[Taronja]}{[Verda]} = \frac{2a\sqrt{a^2-1}}{\frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}} = a^2 - 1$$

$$1 + \frac{[Verda]}{[Groga]} = 1 + \frac{\frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{2a}{a^2-2}} = a^2 - 1$$

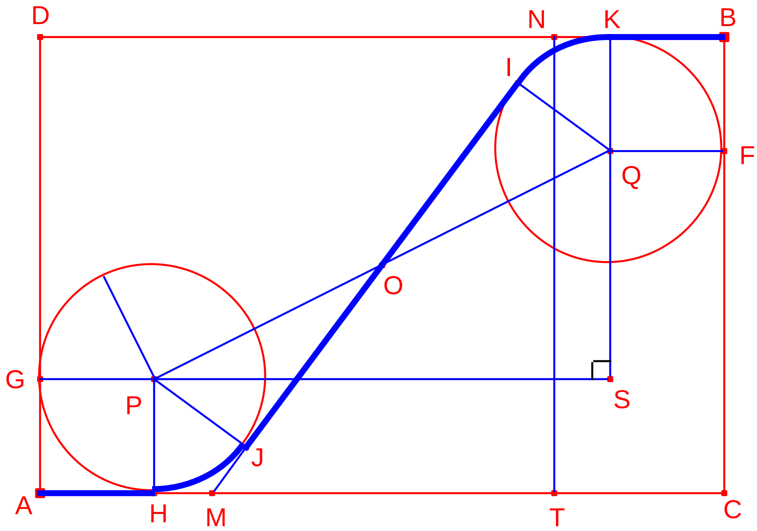
Aleshores:

$$\frac{2\cdot[Taronja]}{[Verda]} = 1 + \frac{[Verda]}{[Groga]}$$

4748.- La figura està formada per un rectangle de costats 30 i 20 i dos forats formats per dos cercles iguals de radi 5 tangents als costats.
Calculeu la distancia mínima de A a B sense caure en els forats.



Solució:



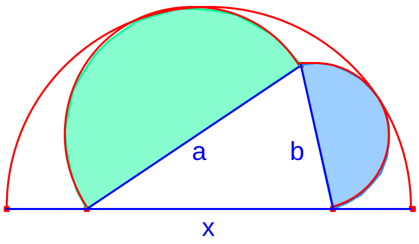
Siga el rectangle $ACBD$ de costats $\overline{AC} = 30, \overline{CB} = 20$
Siguen les circumferències de centres P, Q i radi 5 tangents, cadascuna, a dos costats del rectangle.
La solució té dos camins simètrics.
Siga JL la recta tangent a les dues circumferències.
El camí mínim és $2 \cdot \overline{AH} + 2 \cdot \widehat{HJ} + \overline{JI}$

Siga $\overline{HM} = \overline{JM} = \overline{NI} = \overline{NK} = a$
$\overline{PS} = 20, \overline{QS} = 10$
$\overline{MN} = \overline{PQ} = 10\sqrt{5}$

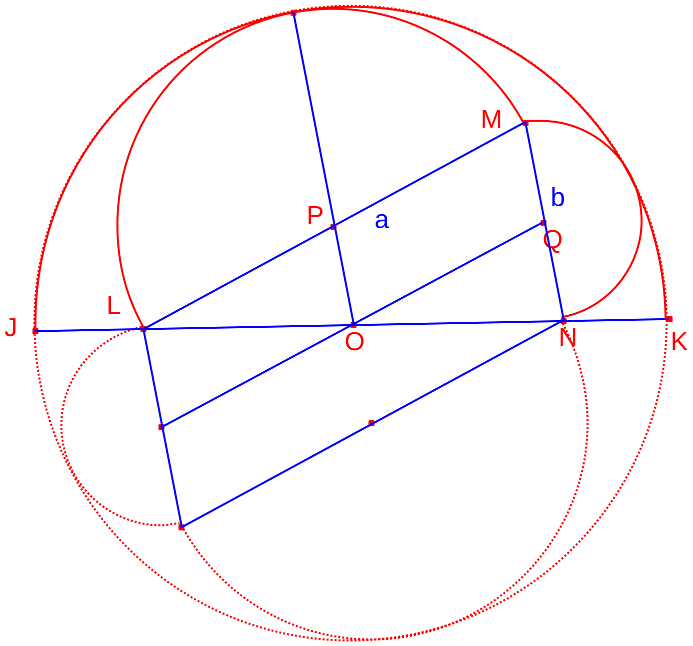
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OIQ}$:
$\overline{OI} = 10$
$\overline{JI} = 20$
$\overline{MN} = 20 + 2a, \overline{MT} = 20 - 2a, \overline{NT} = 20$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTN}$
$(20 + 2a)^2 = (20 - 2a)^2 + 20^2$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{5}{2}$$
Siga $\alpha = \angle HPM$
$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \tan 3\alpha = \frac{4}{3}$$
La longitud mínima cercada és:
$$2 \cdot \overline{AH} + 2 \cdot \widehat{HJ} + \overline{JI} = 2 \cdot 5 + 10 \cdot \arctan\frac{4}{3} + 20 = 30 + 10 \cdot \arctan\frac{4}{3}$$

4749.- La figura està formada per tres semicircumferència de diàmetres a, b, x. Determineu el diàmetre x en funció dels diàmetres a, b.



Solució:



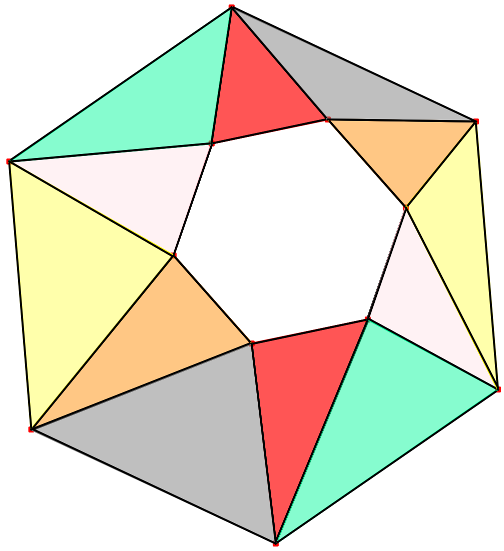
O punt mig LN

OP=MQ

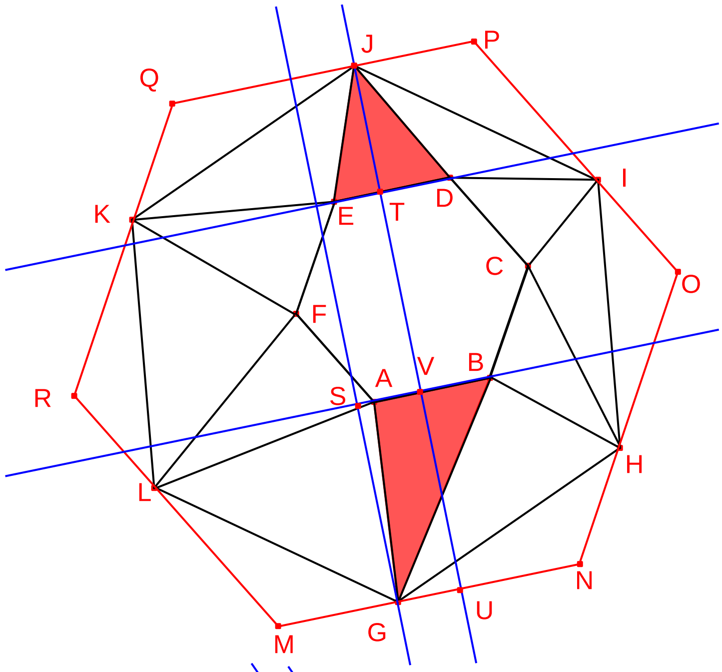
(x-a)/2=b/2

x=a+b

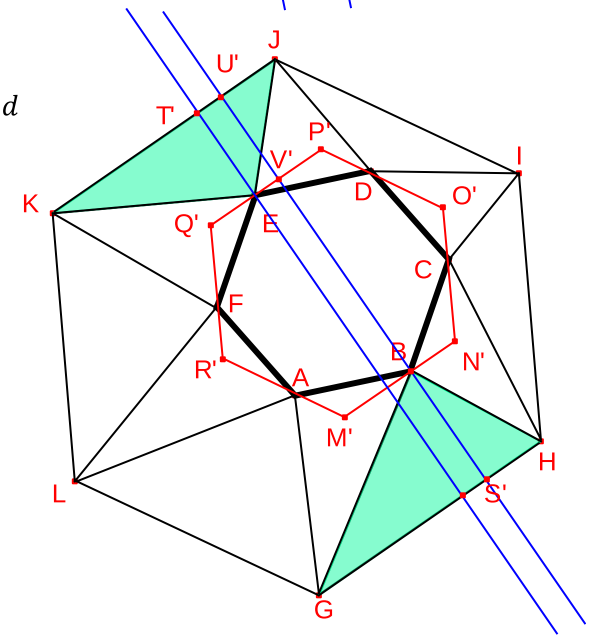
4750.- La figura està formada per dos hexàgons regulars.
Unint els vèrtexs dels dos hexàgons s'han format dotze triangles.
Calculeu les igualtats d'àrees següents:
$[Roja] = [Taronja] = [Rosa]$
$[Verda] = [Grisa] = [Groga]$



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga l'hexàgon regular $GHIJKL$ de costat $\overline{GH} = b$
Siga l'hexàgon regular $MNOPQR$ de costats paral·lels a l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{MN} = c$



Siga $\overline{GS} = h_1$ altura del triangles $\overset{\Delta}{ABG}$
Siga $\overline{JT} = h_2$ altura del triangles $\overset{\Delta}{EDJ}$
$\overline{JU} = c\sqrt{3}, \overline{TV} = a\sqrt{3}$
$h_1 + h_2 = \sqrt{3}(c - a)$
L'àrea roja és:
$$[Roja] = S_{ABG} + S_{EDJ} = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a(c - a)$$
Aleshores:
$$[Roja] = [Taronja] = [Rosa] = \frac{\sqrt{3}}{2}a(c - a)$$



Siga l'hexàgon regular $M'N'O'P'Q'R'$ de costats paral·lels a l'hexàgon regular $GHIJKL$ de costat $\overline{M'N'} = d$
Siga $\overline{BS'} = t_1$ altura del triangles $\overset{\Delta}{GHB}$
Siga $\overline{ET'} = t_2$ altura del triangles $\overset{\Delta}{JKE}$
$\overline{BV'} = d\sqrt{3}, \overline{S'U'} = b\sqrt{3}$
$t_1 + t_2 = \sqrt{3}(b - d)$
L'àrea roja és:
$$[Verda] = S_{GHB} + S_{KJE} = \frac{1}{2}b(t_1 + t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}b(b - d)$$
Aleshores:
$$[Verda] = [Grisa] = [Groga] = \frac{\sqrt{3}}{2}b(b - d)$$