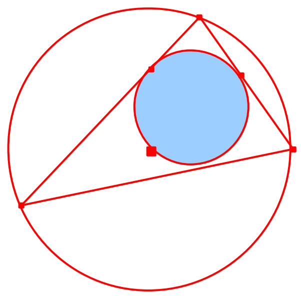
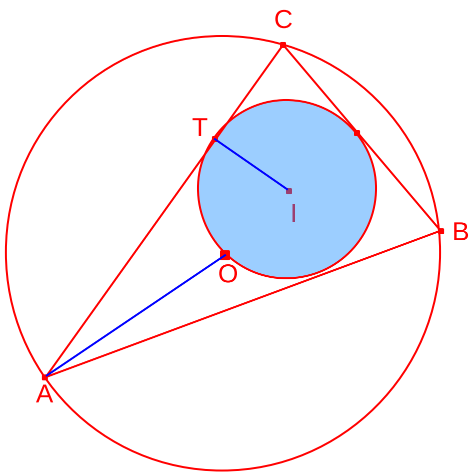
4751.- La figura està formada per un triangle la seua circumferència circumscrita i la circumferència inscrita. El centre de la circumscrita pertany a la circumferència inscrita.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:




$OA=R$

$IT=r$

Teorema Euler

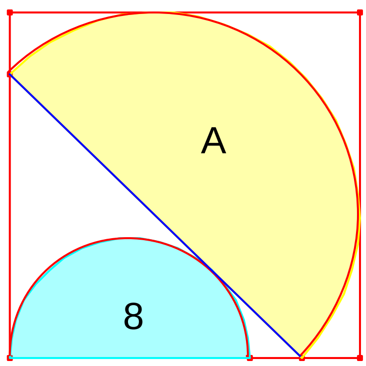
$OI^2=R^2-2Rr$

$r^2=R^2-2Rr$

$r/R=-1+\text{sqrt}(2)$

$(r/R)^2=3-2\cdot\text{sqrt}(2)$

4752.- En la figura, dos semicercles estan en l'interior de d'un rectangles.
Calculeu l'àrea mínima del semicercle $A$.

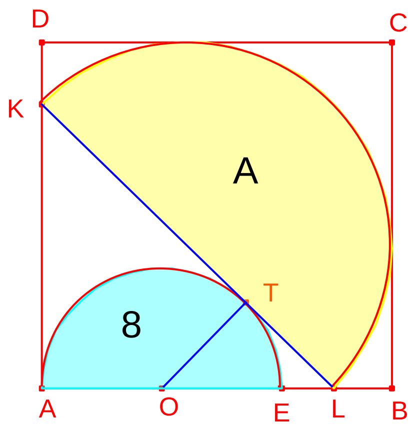



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AE} = 2r$ i àrea 8.

$$\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = 8$$

Siga el semicercle de diàmetre $\overline{KL} = R$
Siguen $\overline{AK} = \overline{AT} = x, \overline{EL} = a$

$$\overline{TL} = 2R - x$$




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KAL}, \overset{\Delta}{OTL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{2R} = \frac{r}{a+r}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTL}$:

$$(a+r)^2 = r^2 + (2R-x)^2$$

$$a^2 + 2ar = 4R^2 + \frac{4r^2R^2}{(a+r)^2} - \frac{8rR^2}{a+r}$$

$$R^2 = \frac{a^3 + 4ra^2 + 5r^2 + 2r^3}{4a}$$

L'àrea del semicercle $A$ és:

$$f(a) = \pi \cdot \frac{a^3 + 4ra^2 + 5r^2 + 2r^3}{4a}$$

Derivant la funció àrea:

$$f'(a) = \pi \cdot \frac{8a^3 + 16ra^2 - 8r^3}{16a^2}$$

$$f'(a) = 0$$

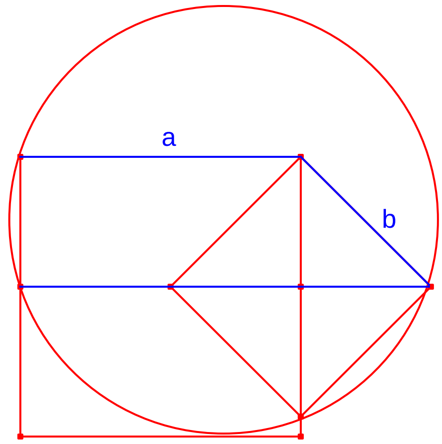
$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}r$$

$$f"\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}r\right) > 0$$

Aleshores, la funció àrea té un mínim quan $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}r$
L'àrea mínima és:

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}r\right) = 5\sqrt{5} + 11$$

4753.- La figura està formada per dos quadrats i una circumferència.
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$




Solució:
El centre de la circumferència és el punt mig del segment $\overline{DF}$

$\overline{DK} = \frac{\sqrt{2}}{2}b, \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{4}b$

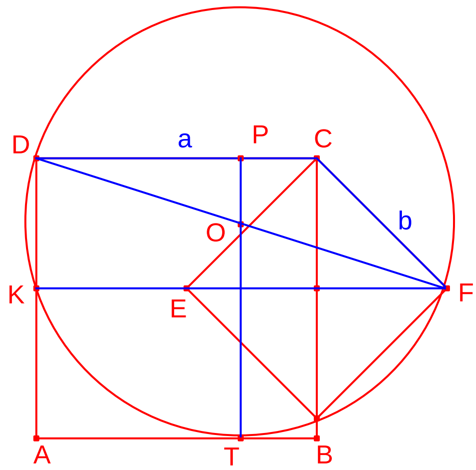
$\overline{DF} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$

$\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$

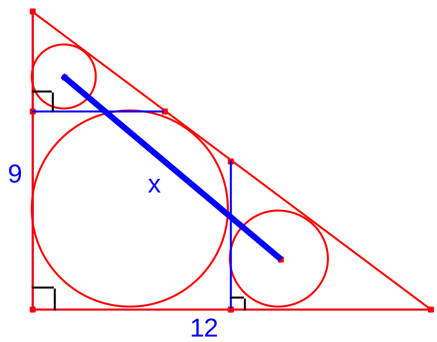
$\frac{\sqrt{2}}{4}b + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} = a$

$6a^2 - 6\sqrt{2}ab - b^2 = 0$

$\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6}$



4754.- La figura està formada per tres triangles rectangles i les seues circumferències inscrites. Calculeu la mesura del segment $x$




Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AB} = 12, \overline{AC} = 9, \overline{BC} = 17$

siga $r = \overline{OL} = \overline{OK}$ radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$r = \frac{12 + 9 - 15}{2} = 3$$

$\overline{AD} = \overline{AG} = 6$

$\overline{CD} = 3$

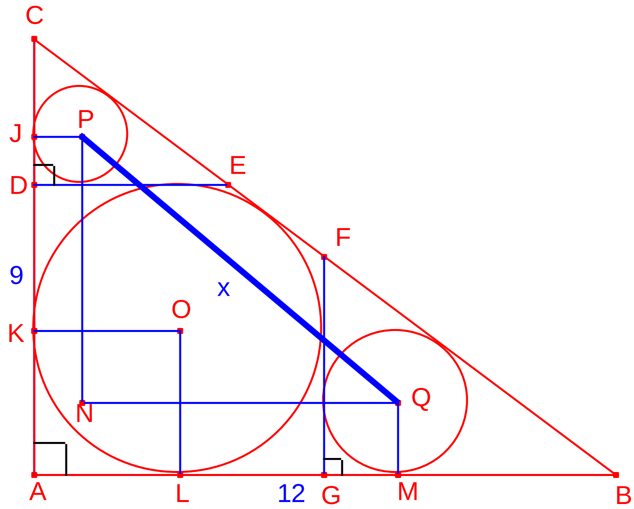
Siga $\overline{PJ} = s$ radi de la circumferència inscrita el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEC}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{s}{3} = \frac{3}{9}$$

$s = 1$

Siga $\overline{QM} = t$ radi de la circumferència inscrita el triangle rectangle $\overset{\Delta}{GBF}$.




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{GBF}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{t}{3} = \frac{6}{12}$$

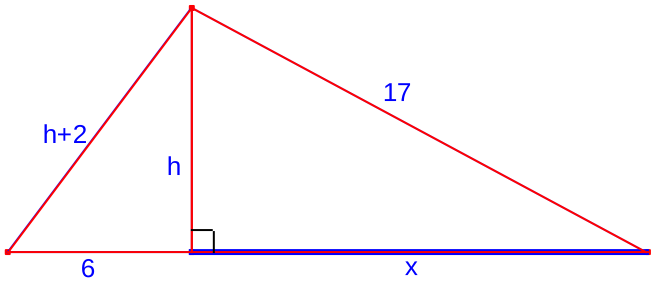
$$t = \frac{3}{2}$$

$$\overline{PN} = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}, \overline{NQ} = 6 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{13}{2}$$

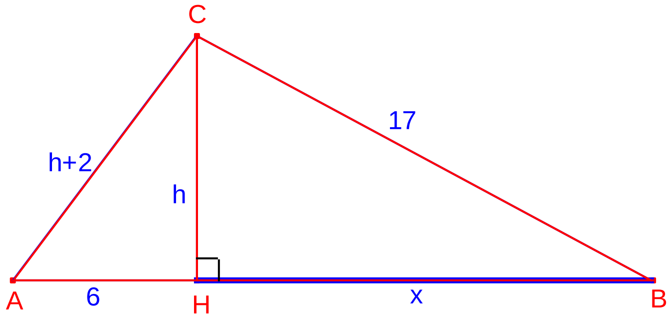
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNQ}$:

$$x = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{290}}{2}$$

4755.- En la figura calculeu la mesura del segment $x$



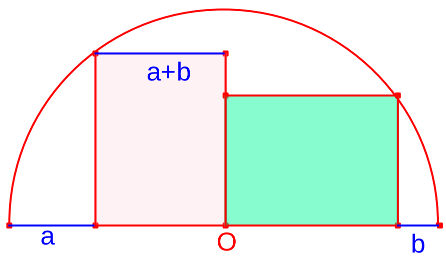

Solució:



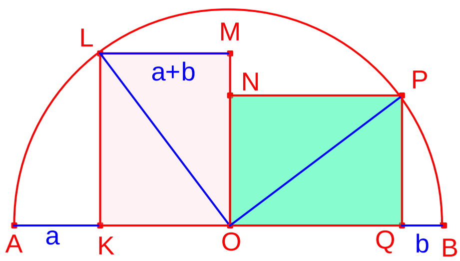

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$:
$(h+2)^2 = 36 + h^2$
Resolent l'equació:
$h = 8$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHB}$:
$289 = 64 + x^2$
$x^2 = 15$

4756.- En la figura hi ha dos rectangles d'igual àrea inscrits en un semicercle, que tenen un vèrtex comú en el centre del semicercle.
Calculeu la proporció:
$$\frac{a}{b}$$

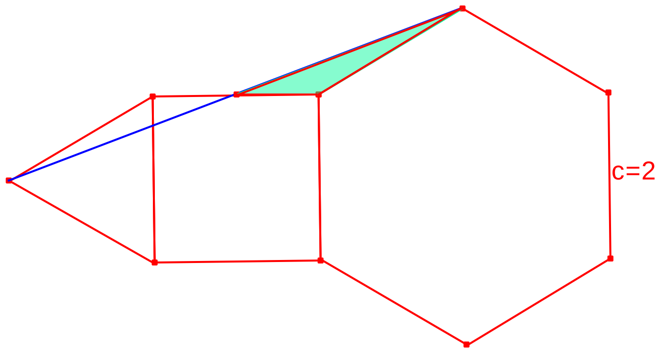



Solució:
Siga el rectangle $KLMO$ de costats $\overline{OK} = a + b, \overline{OM} = x$
Siga el rectangle $ONPQ$ de costats $\overline{OQ} = 2a, \overline{PQ} = y$
Els dos rectangles tenen la mateixa àrea:
$$(a + b)x = 2ay$$
$$\frac{x}{y} = \frac{2a}{a + b}$$

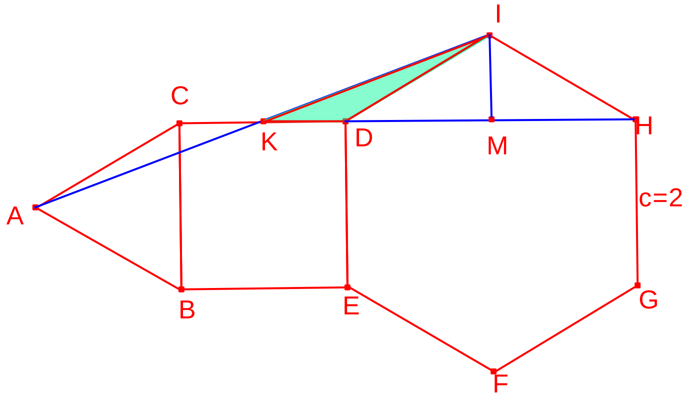



$$\overline{OL} = \overline{OP} = 2a + b$$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{KOL}, \overset{\Delta}{OQP}$:
$$x^2 = 3a^2 + 2ab$$
$$y^2 = b^2 + 4ab$$
Dividint ambdues expressions:
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{3a^2 + 2ab}{b^2 + 4ab}$$
$$\frac{3a^2 + 2ab}{b^2 + 4ab} = \frac{4a^2}{(a + b)^2}$$
Simplificant:
$$3a^3 - 8ba^2 + 3b^2a + 2b^3 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\frac{a}{b} = 1, \frac{a}{b} = 2$$

4757.- La figura està formada per un triangle equilàter un quadrat i un hexàgon regular tots de costat 2.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.




Solució:

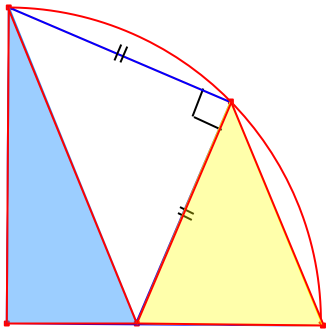



Siguen el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$, el quadrat $BCDE$ i l'hexàgon regular $DEFGHI$ de costat $\overline{AB} = 2$

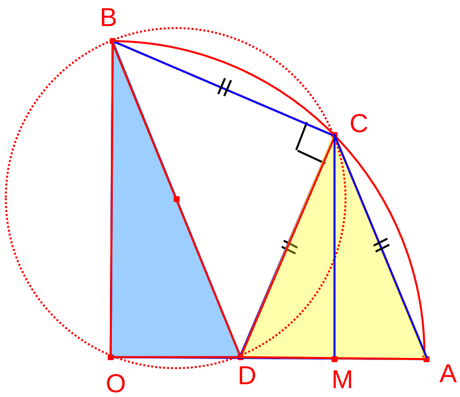
Els triangles $\overset{\Delta}{ACK}, \overset{\Delta}{IDK}$ són iguals.
Aleshores, K és el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$S_{KDI} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

4758.- La figura està formada per un quadrant i un triangle rectangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre els dos triangles ombrejats.

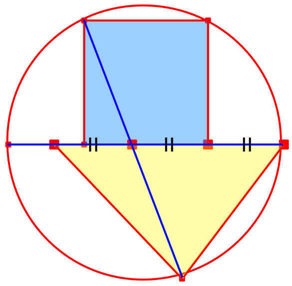


Solució:
Siga el quadrant de centre $O$ i radi $\overline{OA} = 1$
$\angle BCA = 135°, \angle DCA = 45°$
El quadrilàter $ODCB$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
$\angle BOC = \angle BDC = 45°$
$\overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$

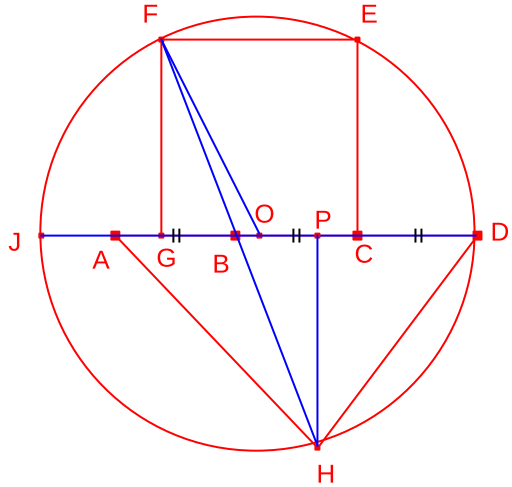



Siga $M$ el punt mig del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DAC}$
$\angle DCM = \frac{45°}{2}$
$\angle ADC = \angle DAC = 90° - \frac{45°}{2}$
$\angle ODB = 90° - \frac{45°}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DCB}$:
$\overline{BD} = a\sqrt{2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOD}, \overset{\Delta}{CMD}$ són semblants i de raó $\sqrt{2} : 1$
$S_{CMD} = \frac{1}{2} S_{BOD}$
Aleshores:
$S_{CDA} = S_{BOD}$

4579.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat inscrit en la semicircumferència i l'àrea del triangle ombrejat.

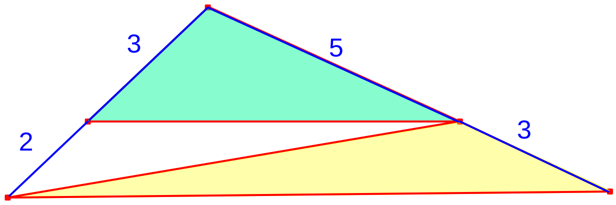


Solució:
Siga la circumferència de centre $O$.
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{JG} = 1$
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CD} = x$
$\overline{JD} = 2 + x, \overline{OF} = \overline{OF} = \dfrac{2+x}{2}$

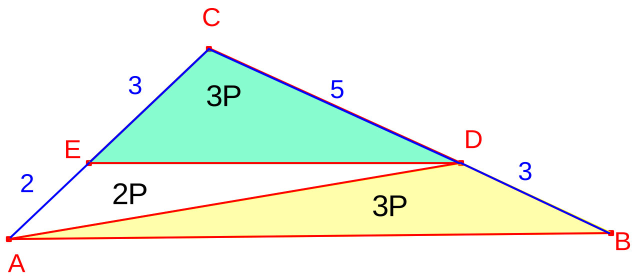



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGO}$:
$\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (x-1)^2$
Simplificant:
$x^2 - x - 1 = 0$
$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGB}$:
$\overline{BF}^2 = \Phi^2 + (\Phi - 1)^2 = 3$
$\overline{BF} = \sqrt{3}$
$\overline{JB} = \Phi, \overline{BD} = 2$
Aplicant la potència de $F$ respecte de la circumferència:
$\overline{JB} \cdot \overline{DB} = \overline{FB} \cdot \overline{HB}$
$2\Phi = \sqrt{3} \cdot \overline{HB}$
$\overline{HB} = \dfrac{2\Phi}{\sqrt{3}}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FGB}, \overset{\Delta}{HPB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\dfrac{\overline{HP}}{\Phi} = \dfrac{\frac{2\Phi}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$
$\overline{HP} = \dfrac{2\Phi^2}{3}$
L'àrea del quadrat $CEFG$ és:
$S_{CEFG} = \Phi^2$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADH}$ és:
$S_{ADH} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{HP} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{2\Phi^2}{3} = \Phi^2$
$\dfrac{S_{CEFG}}{S_{ADH}} = 1$

4760.- Un triangle es divideix en tres triangles.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles groc i verd?




Solució:




[CED]/[AED]=3/2

[CDA]/[BDA]=5/3

[CDE]=[ABD]