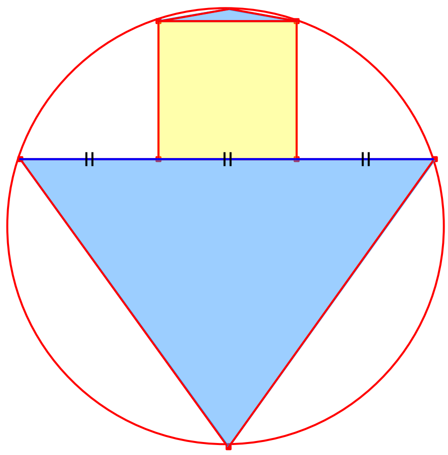
4761.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



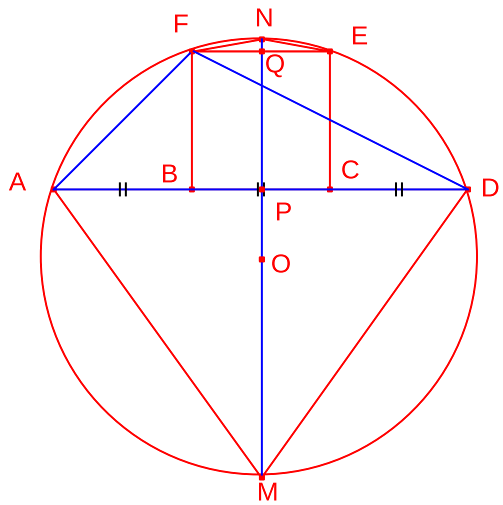
Solució:

Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BF} = 1$

$\overline{AF} = \sqrt{2}, \overline{DF} = \sqrt{5}$

Siga $\alpha = \angle AFD$

Siga $\overline{OA} = r$ radi de la circumferència.



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$

$$\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$9 = 2 + 5 - 2\sqrt{10} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10},}, \tan\alpha = -3$$

$$\angle MDP = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

$$\overline{MP} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{10}}{3} = \frac{1+\sqrt{10}}{2}$$

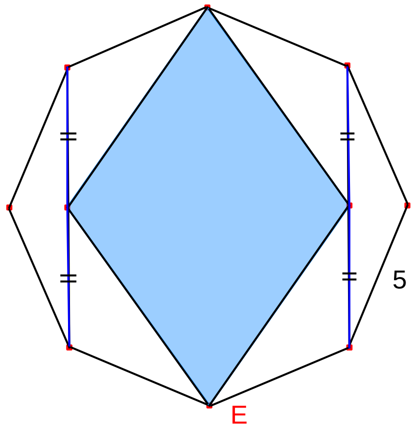
$$\overline{NQ} = \sqrt{10} - \frac{1+\sqrt{10}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{10}-3}{2}$$

$$S_{ADM} + S_{FEN} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1+\sqrt{10}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{10}-3}{2} = \sqrt{10}$$

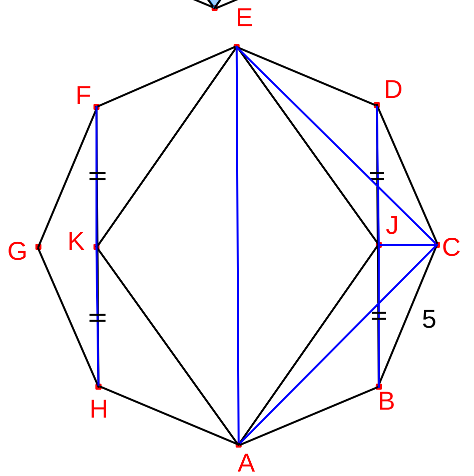
$$S_{BCEF} = 1$$

$$\frac{S_{ADM} + S_{FEN}}{S_{BCEF}} = \sqrt{10}$$

4762.- La figura està formada per un octògon regular de costat 5.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 5$, $\angle ABC = 135°$

Siga $x = \overline{AC} = \overline{CE} = x$

Siga $y = \overline{CJ}, z = \overline{AE}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$x^2 = 25 + 25 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

$$x = 5\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BJC}$:

$$y^2 = 25 - \frac{1}{4}25\left(2 + \sqrt{2}\right) = \frac{25}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACE}$:

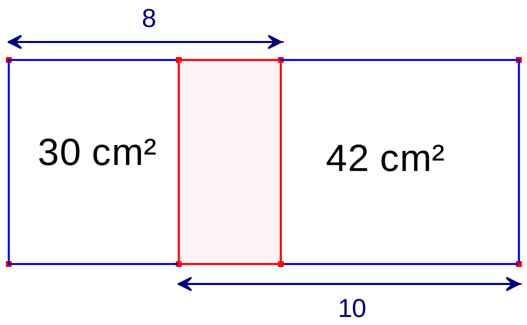
$$z = x\sqrt{2} = 5\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

L'àrea del rombe $AJEK$ és:

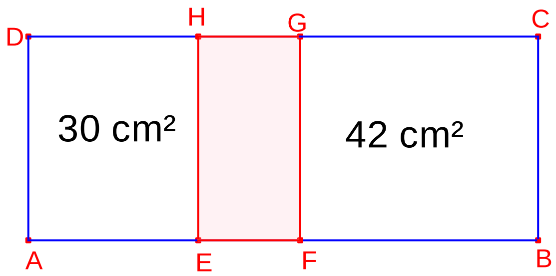
$$S_{AJEK} = \frac{1}{2}z(z - 2y) = \frac{1}{2}z^2 - yz = \frac{1}{2} \cdot 25\left(4 + 2\sqrt{2}\right) - \frac{5}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} =$$

$$= 25\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

4763.- La figura està formada per un rectangle que conté tres rectangles.
Dos d'ells tenen àrees $30\ cm^2, 42\ cm^2$.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.

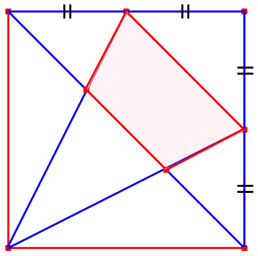


Solució:

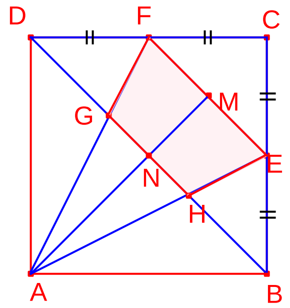


$\overline{EF} = \overline{HG} = x, \overline{AD} = \overline{EH} = \overline{BG} = y$
$\overline{AE} = 8 - x, \overline{FB} = 10 - x$
Les àrees dels rectangles $AEHD, FBCG$ són 30 i 42, respectivament:
$(8 - x)y = 32$
$(10 - x)y = 42$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = 3 \cdot 6 = 18\ cm^2$

4764.- Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$



$$\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{MN} = \overline{CM} = \frac{1}{4}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{GH} = \frac{2}{3} \cdot \overline{FE} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

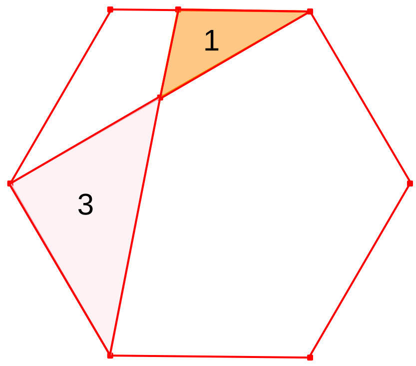
L'àrea del trapezi ombrejat $EFGH$ és:

$$S_{DFGH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{24}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{24}$$

4765.- La figura està formada per un hexàgon regular.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:

$\overline{AB} = c$

$\overline{FP} = \frac{6}{c}$

$\overline{PD} = c\sqrt{3} - \frac{6}{c}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = S_{ADF}$

$x = \overline{DQ}$

$S_{DQP} = 1 = \frac{1}{2}x\left(c\sqrt{3} - \frac{6}{c}\right)$

$x = \frac{2c}{\sqrt{3}c^2 - 6}$

$S_{ADQ} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = xc\sqrt{3}$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = \frac{2c}{\sqrt{3}c^2 - 6} \cdot c\sqrt{3}$

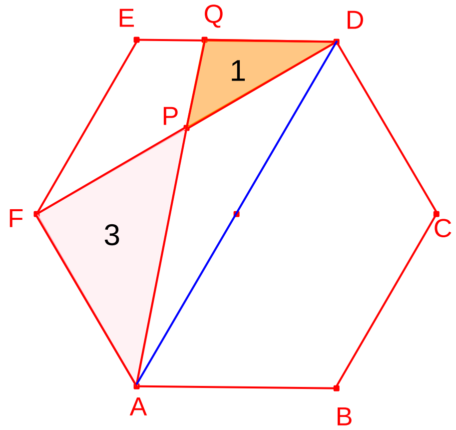
$\frac{3}{2}c^4 - 7\sqrt{3}c^2 + 12$

Resolent l'equació:

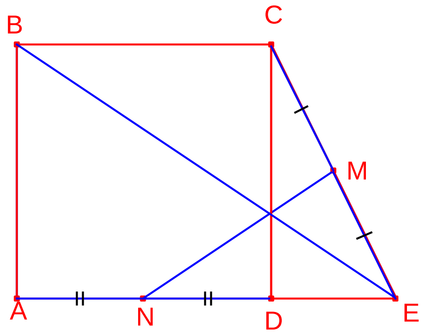
$c^2 = 4\sqrt{3}$

L'àrea de l'hexàgon $ABCDEF$ és:

$S_{ABCDEF} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 18$



4766.- En la figura, $ABCD$ és un quadrat.
$\overline{BE} = 24$
Calculeu la mesura del segment $\overline{MN}$

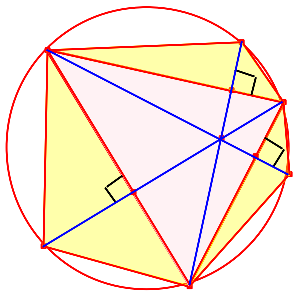


Solució:
Siguen $\overline{AB} = c, \overline{DE} = x$

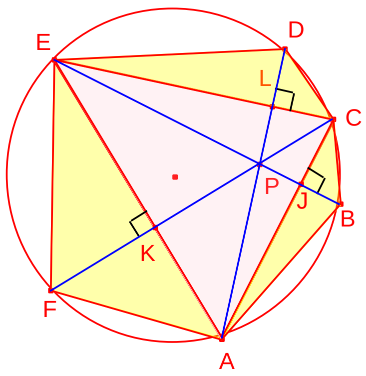
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAE}$:
$24^2 = c^2 + (c + x)^2$
$2c^2 + x^2 + 2cx = 24^2$
$\overline{CN}^2 = \frac{5}{4}c^2$
$\overline{CE}^2 = c^2 + x^2$
$\overline{NE} = \left(\frac{1}{2}c + x\right)^2$

$\overline{MN}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CNE}$:
$4 \cdot MN^2 = 2 \cdot \overline{CN}^2 + 2 \cdot \overline{NE}^2 - \overline{CE}$
$4 \cdot \overline{MN}^2 = 2 \cdot \frac{5}{4}c^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}c + x\right)^2 - (c^2 + x^2)$
$4 \cdot \overline{MN}^2 = 2c^2 + x^2 + 2cx$
$4 \cdot \overline{MN}^2 = 24^2$
$\overline{MN} = 12$

4767.- Una circumferència amb diverses cordes formen quatre triangles de dos colors.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea lila.



Solució:



a=AngleDAC=AngleDEC
b=AngleBAC=AngleBEC

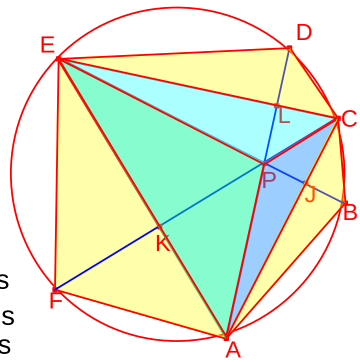
AngleEDA=90º-a
AngleEDA+AngleBEC=90º

90º-a+b=90º
a=b

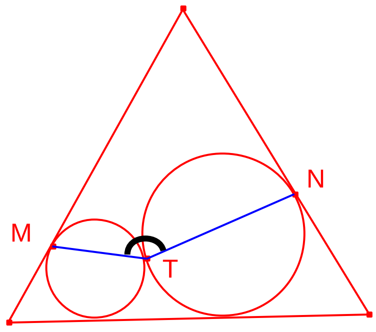
anàlogament:
AngleFCA=AngleACB

Els triangles AFE, APE iguals
Els triangles APC, ABC iguals
Els triangles CDE, CPE iguals

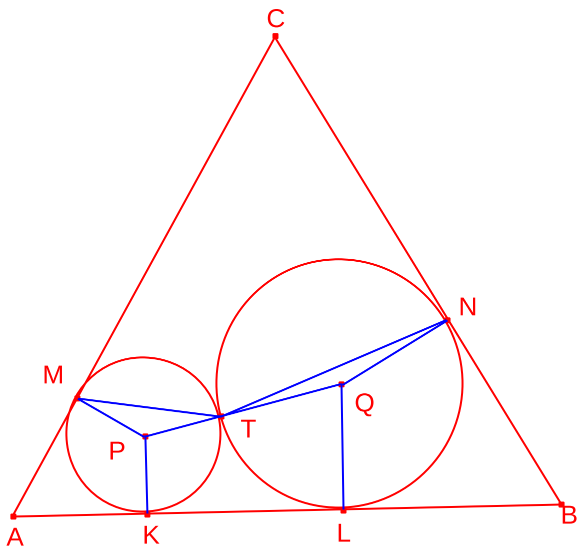
[Groga]=[Lila]



4768.- La figura està formada per un triangle que conté dues circumferències tangents.
M, N, T són punts de tangència.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle MTN$



Solució:



AngleMTN=x

AnglePMT=AnglePTM=a

AngleQTN=AngleQNT=b

AngleMPK=AngleLQN=120º

AngleTPK=60º+2a

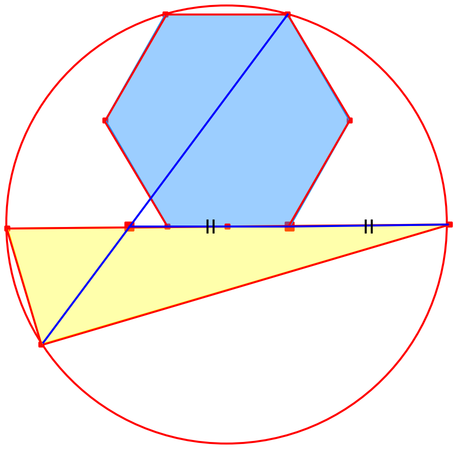
AngleTQL=60º+2b

60º+2a+60º+2b+90º+90º=360º

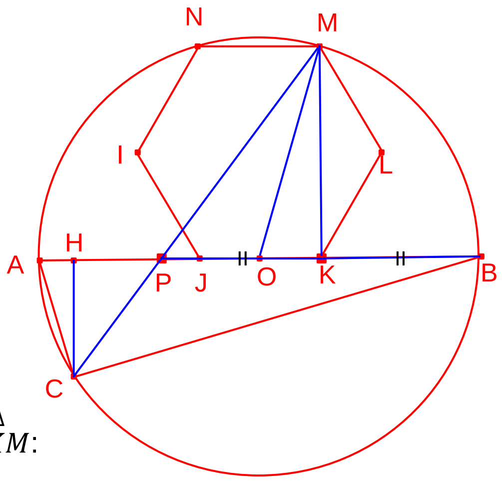
a+b=30º

x=180º-(a+b)=150º

4769.- La figura està formada per una circumferència, un hexàgon regular sobre el diàmetre i un triangle sobre el diàmetre.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon regular i l'àrea del triangle.



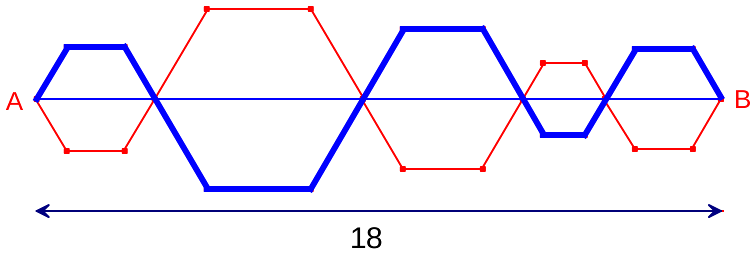
Solució:
Siga $\overline{PK} = \overline{KB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $IJKLMN$ de costat $\overline{IJ} = 2a$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OB} = 1 + a$
$\overline{AP} = 2a$
$\overline{KM} = 2a\sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:
$(1 + a)^2 = a^2 + 12a^2$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{1 + \sqrt{13}}{12}$$



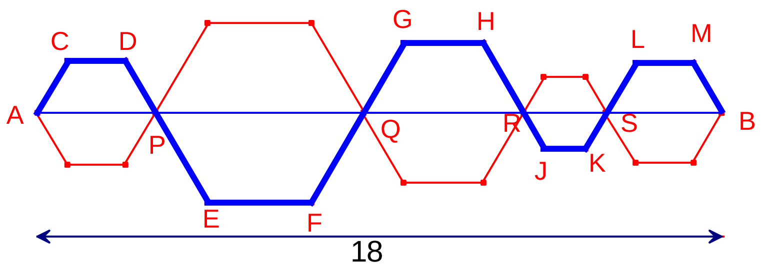
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKM}$:
$\overline{PM} = \sqrt{1 + 12a^2}$

Aplicant la potència del punt P respecte de la dircumferència:
$4a = \overline{CP} \cdot \sqrt{1 + 12a^2}$
$$\overline{CP} = \frac{4a}{\sqrt{1 + 12a^2}}$$
Siga H la projecció de C sobre el diàmetre $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CHP}, \overset{\Delta}{MKP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{CH}}{2a\sqrt{3}} = \frac{\frac{4a}{\sqrt{1 + 12a^2}}}{\sqrt{1 + 12a^2}}$$
$$\overline{CH} = \frac{8a^2\sqrt{3}}{1 + 12a^2}$$
L'àrea de l'hexàgon regular $IJKLMN$ és:
$$S_{IJKLMN} = 6\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4a^2 = 6a^2\sqrt{3}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(2 + 2a) \cdot \overline{CH} = \frac{(1 + a)8a^2\sqrt{3}}{1 + 12a^2}$$
La proporció d'àrees és:
$$S_{IJKLMN} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{\frac{8(1 + a)a^2\sqrt{3}}{1 + 12a^2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + a^2}{1 + a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + \frac{7 + \sqrt{13}}{6}}{1 + \frac{1 + \sqrt{13}}{12}} = \frac{3}{2}$$

4770.- La figura està formada per cinc hexàgons regulars. Calculeu la longitud de la línia poligonal ombrejada.



Solució:



$\overline{AP} = 2a, \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DP} = 3a$
$\overline{PQ} = 2b, \overline{PE} + \overline{EF} + \overline{FQ} = 3b$
$\overline{QR} = 2c, \overline{QG} + \overline{GH} + \overline{HR} = 3c$
$\overline{RS} = 2d, \overline{RJ} + \overline{JK} + \overline{KS} = 3d$
$\overline{SB} = 2e, \overline{SL} + \overline{LM} + \overline{MB} = 3e$

$18 = \overline{AB} = 2(a + b + c + d + e)$
$[línia\ poligonal] = 3(a + b + c + d + e) = 27$