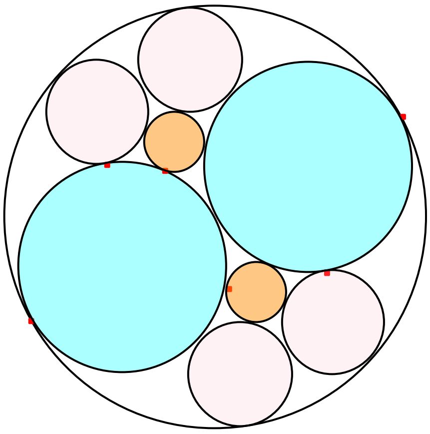
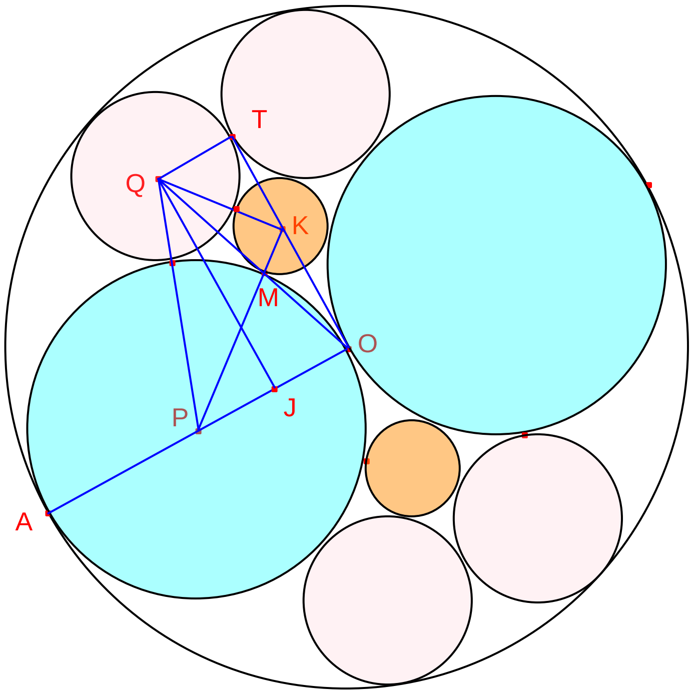
4771.- La figura està formada per 9 circumferències. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.

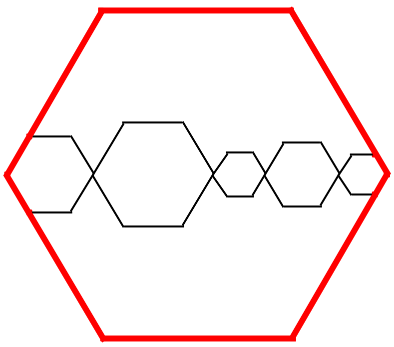


Solució:
Siga $\overline{OA} = 1$
$\overline{PA} = \frac{1}{2}$
Siga $\overline{QT} = \overline{OJ} = r$
$\overline{PQ} = \frac{1}{2} + r, \overline{PJ} = \frac{1}{2} - r, \overline{OQ} = 1 - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{PJQ}, \overset{\Delta}{QJO}$:
$2r = (1-r)^2 - r^2$
Resolent l'equació:
$r = \frac{1}{4}$
$\overline{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Siga $\overline{KM} = t$
$\overline{PK} = \frac{1}{2} + t, \overline{QK} = \frac{1}{4} + t$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{POK}, \overset{\Delta}{QTK}$:
$\overline{OK} = \sqrt{t^2 + t}, \overline{TK} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}t}$
$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{t^2 + t} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}t}$
Resolent l'equació:
$t = \frac{1}{7}$

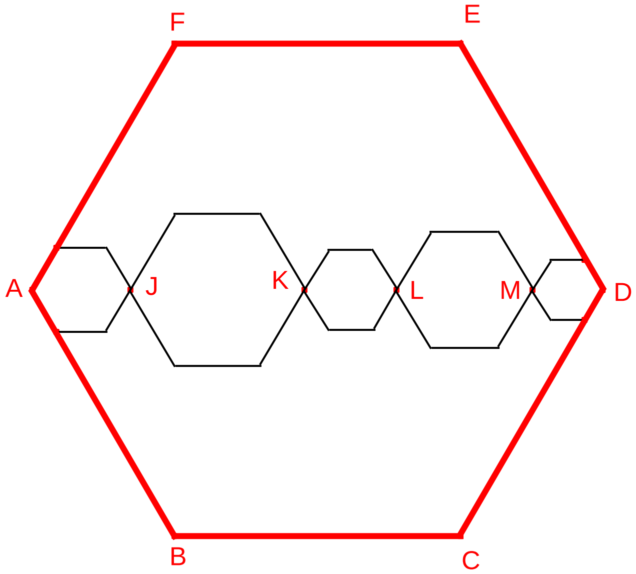


L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{149}{196}\pi$
L'àrea total és:
$S_{Total} = \pi$
La proporció és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{Total}} = \frac{155}{196}$

4772.- La figura està formada per sis hexàgons regulars.
Si el perímetre de l'hexàgon regular exterior és 30, calculeu la suma dels perímetres de tots els cinc hexàgons interiors



Solució:

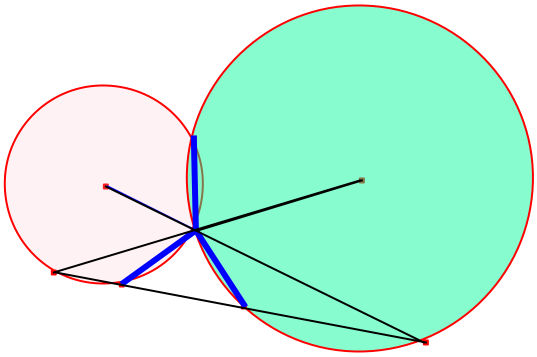


Siga l'hexàgon regular exterior $ABCDEF$ de perímetre 30.
La diagonal major mesura $\overline{AD} = 10$

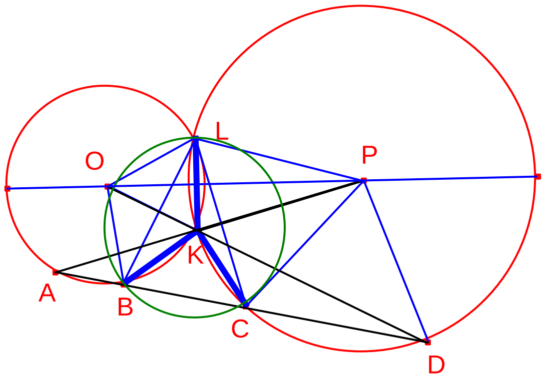
Siguen els hexàgons regulars de diagonals majors:
$\overline{AJ} = 2a, \overline{JK} = 2b, \overline{KL} = 2c, \overline{LM} = 2d, \overline{MD} = 2e$
$\overline{AD} = 10 = 2(a+b+c+d+e)$
$a+b+c+d+e = 5$

La suma dels perímetres dels cinc hexàgons interior és:
$P_{total} = 6a + 6b + 6c + 6d + 6e = 6(a+b+c+d+e) = 30$

4773.- La figura està formada per dues circumferències secants.
Proveu que els tres segments blaus són iguals.



Solució:



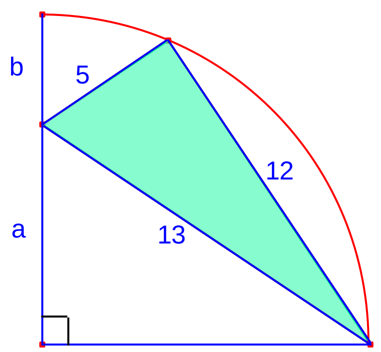
AngleBOK=x
AngleCPK=y

angleOKB=AngleOBK=90º-x/2
AnglePCK=AnglePKC=90º-y/2
AngleCAK=x
Angle BCK=y

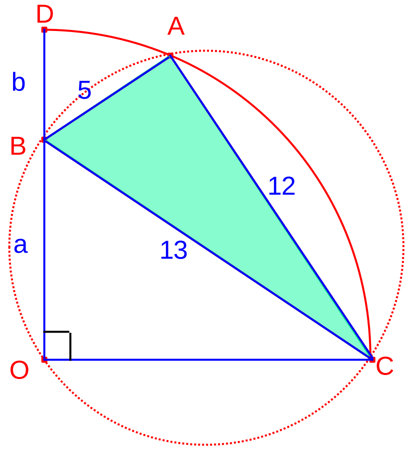
AngleKBC=180º-(AngleBOD+angleADO+AngleOBK)=90º-(x+y)/2
AngleKCB=180º-(AngleAPC+anglePAD+AnglePCK)=90º-(x+y)/2

BK=CK
AngleBKC=x+y
AngleBLC=(x+y)/2
L pertany a la circumferència centre K i radi KB=KC
KB=KC=KL

4774.- Un quadrant té inscrit un triangle de costats
$5, 12, 13$
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$

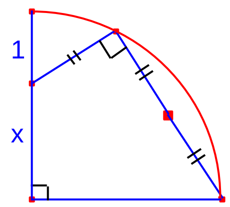


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{AC} = a + b$
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = 13, b = 12, c = 5$
$a^2 = b^2 + c^2$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:
$\angle BAC = 90°$
El quadrilàter $OCAB$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$5(a + b) + 12a = 13(a + b)$
Simplificant:
$\frac{a}{b} = 2$



Nota:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:
$169 = a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2$
Resolent l'equació:
$a = 2\sqrt{13}, b = \sqrt{13}$

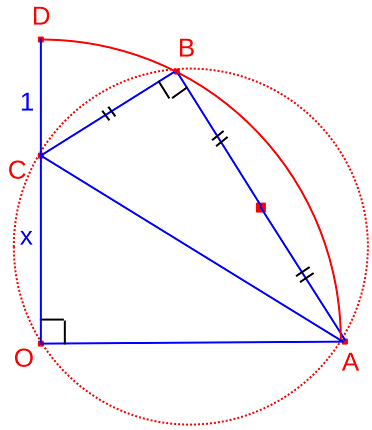
4775.- En el quadrant de la figura, determineu la mesura del segment x



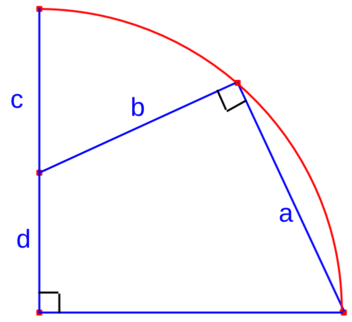
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{AC} = 1 + x$
Siga $\overline{BC} = a, \acute{AB} = 2a$

Aplicant el teorema Pitàgores:al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = a\sqrt{5}$
El quadrilàter $OABC$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$a(1 + x) + 2ax = (1 + x)a\sqrt{5}$
Simplificant:
$(3 - \sqrt{5})x = \sqrt{5} - 1$

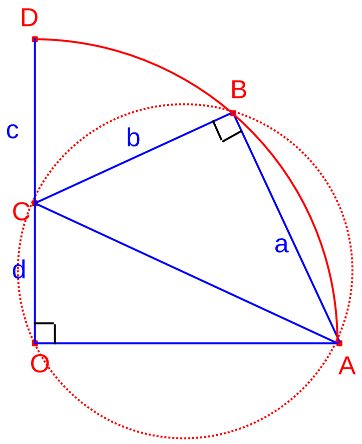
$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



4776.- La figura està formada per un quadrant.
Calculeu el valor:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$



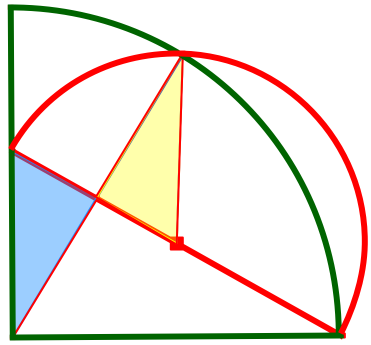
Solució:
Siga $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$



Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{AC} = d(1+k)$
Siga $\overline{BC} = b, \acute{AB} = kb$

Aplicant el teorema Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = b\sqrt{1+k^2}$
El quadrilàter $OCBA$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$d(1+k)b\sqrt{1+k^2} = bd(1+k) + bdk$
Simplificant:
$(1+k)\sqrt{1+k^2} = 1+2k$
Elevant al quadrat i simplificant:
$k^3 + 2k^2 - 2k - 2 = 0$
Resolent l'equació amb ajut de la calculadora:
$k \approx 1.170086487$

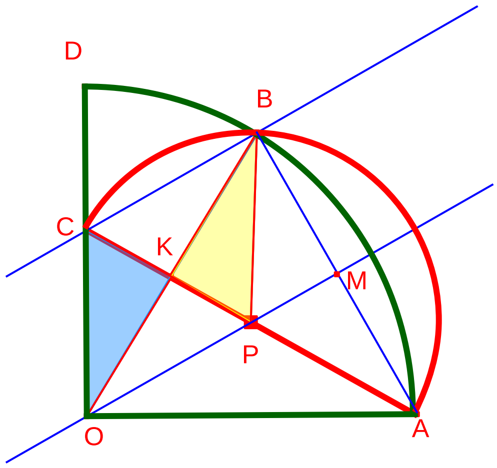
4777.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle blau i del triangle groc.



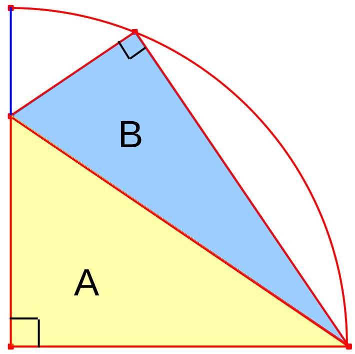
Solució:
$\angle CBA = 90°$

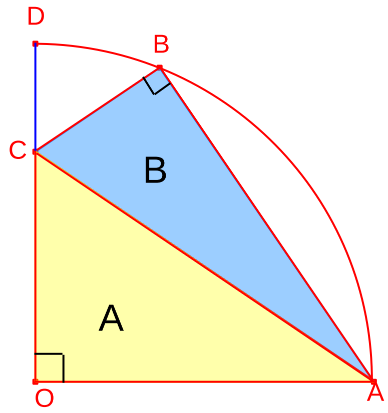
Els triangles isòsceles $O\overset{\Delta}{B}P, O\overset{\Delta}{A}P$ són iguals.
$\angle BOP = \angle AOP$

$\overline{OP}, \overline{BC}$ són perpendiculars a $\overline{AB}$
Les rectes BC, OP són paral·leles.
$OPBC$ és un trapezi, aleshores:
$S_{OKC} = S_{KPB}$



4778.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles rectangles
Si la suma d'àrees $A + B$ és maximal calculeu la proporció:
$\frac{A}{B}$

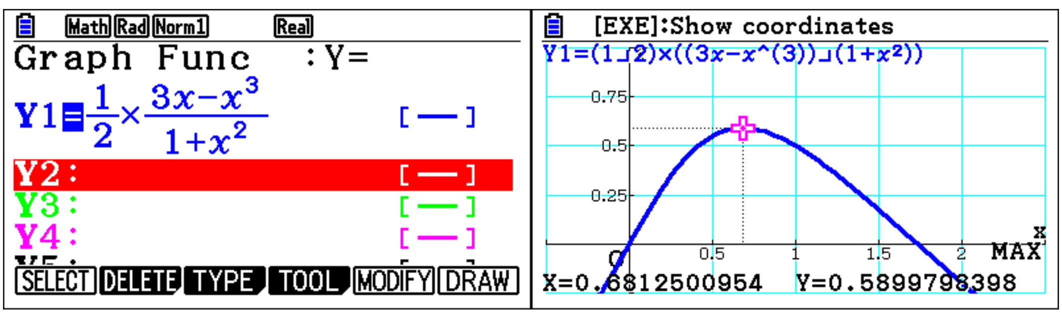




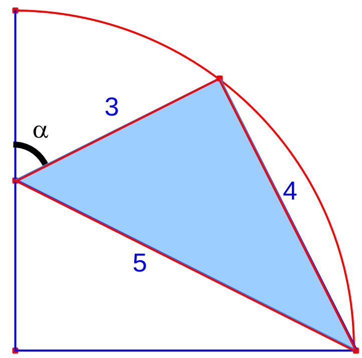
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{AC} = 1$
Siga $\overline{OC} = a, \overline{AB} = b, \overline{BC} = c$

Aplicant el teorema Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$
$\overline{AC} = \sqrt{1 + a^2}$
El quadrilàter $OABC$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$ab + c = \sqrt{1 + a^2}$
Aplicant el teorema Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$b^2 + c^2 = 1 + a^2$

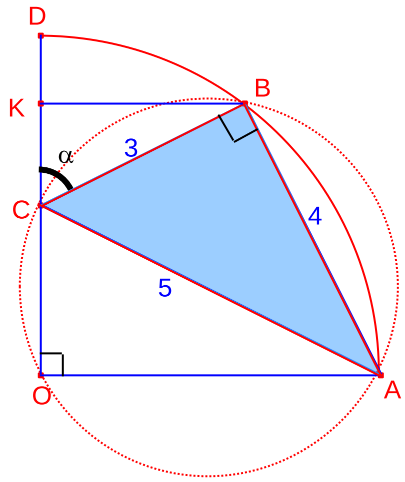
$c = \sqrt{1 + a^2} - ab, b = \frac{2a\sqrt{1 + a^2}}{1 + a^2}$
La suma d'àrees dels triangles $\overset{\Delta}{OAC}, \overset{\Delta}{ABC}$ és:
$A + B = \frac{1}{2}(a + bc) = \frac{1}{2}\frac{3a - a^3}{1 + a^2}$
Considerem la funció àrea:
$S(a) = \frac{1}{2}\frac{3a - a^3}{1 + a^2}, 0 \leq a \leq 1$
$S'(a) = \frac{1}{2}\frac{-a^4 - 6a^2 + 3}{(1 + a^2)^2}$
$S'(a) = 0$ quan $a^2 = -3 + 2\sqrt{3}$
$S"\left(-3 + 2\sqrt{3}\right) < 0$
Calculem les àrees del triangles $\overset{\Delta}{OAC}, \overset{\Delta}{ABC}$
$A = S_{OAC} = \frac{1}{2}a$
$B = S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}\frac{2a - 2a^3}{1 + a^2}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{A}{B} = \frac{a(1 + a^2)}{2a - 2a^3} = \frac{1 + a^2}{2(1 - a^2)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$



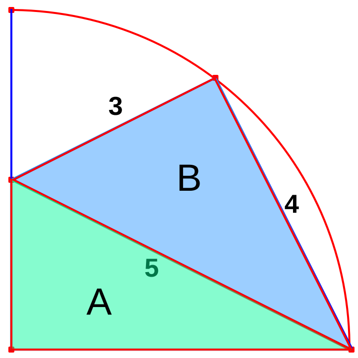
4779.- Un quadrant conté un triangle de costats 3, 4, 5.
Calculeu la mesura $\sin\alpha$



Solució:
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{AC}=r$
Aplicant el teorema Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$
$\overline{OC}=\sqrt{25-r^2}$
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $B=90°$
El quadrilàter $OABC$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$3r+4\sqrt{25-r^2}=5r$
$2\sqrt{25-r^2}=r$
Elevant al quadrat:
$100-4r^2=r^2$
Resolent l'equació:
$r=2\sqrt{5}$
$\overline{OC}=\sqrt{5}$
Siga K la projecció de B sobre $\overline{OD}$
Siguen $\overline{CK}=x, \overline{KB}=y$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{OKB}, \overset{\Delta}{CKB}$:
$20=\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2$
$9=x^2+y^2$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{6\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$
$\sin\alpha=\dfrac{y}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

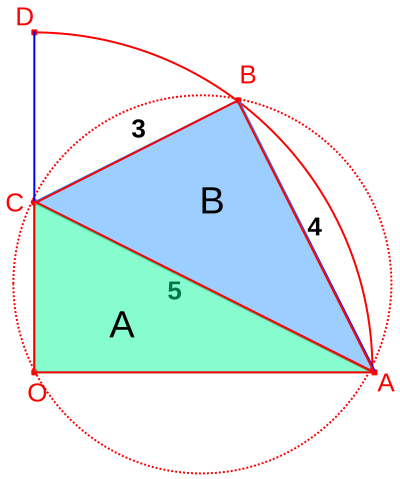


4780.- Un quadrant conté dos triangles un d'ells de costats 3, 4, 5.
Calculeu la proporció d'àrees:
$\frac{A}{B}$



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{AC} = r$

plicant el teorema Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$
$\overline{OC} = \sqrt{25 - r^2}$
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $B = 90°$
El quadrilàter $OABC$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:



$3r + 4\sqrt{25 - r^2} = 5r$
$2\sqrt{25 - r^2} = r$
Elevant al quadrat:
$100 - 4r^2 = r^2$
Resolent l'equació:
$r = 2\sqrt{5}$
$\overline{OC} = \sqrt{5}$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$ és:
$S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$
La proporció d'àrees és:
$\frac{A}{B} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{6}$