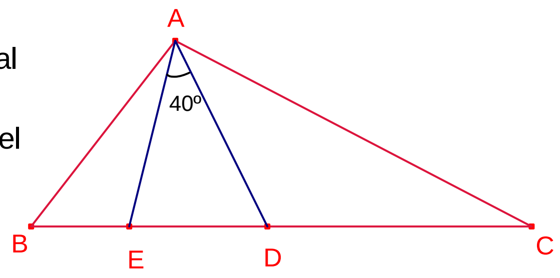
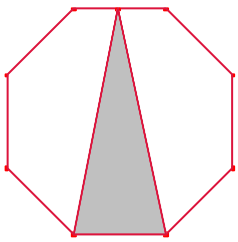
Problemes de Geometria per a l'ESO 48



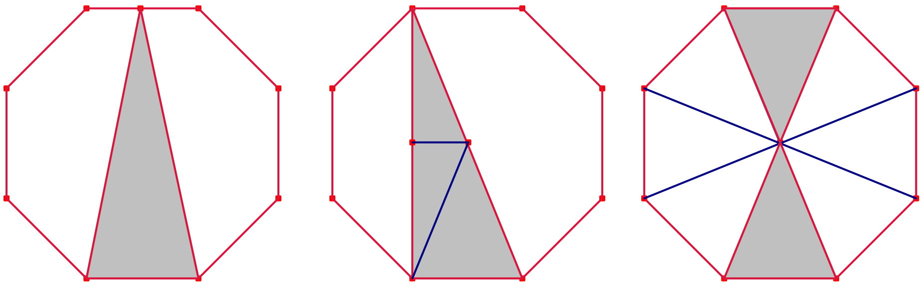
471.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, els punts D i E pertanyen al costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD}=\overline{BA}$ i $\overline{CE}=\overline{CA}$.
Si $\angle DAE=40º$ determineu la mesura de l'angle A del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
Siga $\alpha=\angle BAE$.
$\angle BAD=40º+\alpha$.
El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles, $\overline{BD}=\overline{BA}$, aleshores:
$\angle ADB=40º+\alpha$, $B=100º-2\alpha$.
$\angle AEC=B+\angle BAE=100º-\alpha$.
El triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és isòsceles, $\overline{CE}=\overline{CA}$, aleshores:
$\angle EAC=100º-\alpha$.
$A=\angle BAE+\angle EAC=\alpha+100º-\alpha=100º$.

472.- En la figura un octògon regular té inscrit un triangle. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle i l'octògon regular.

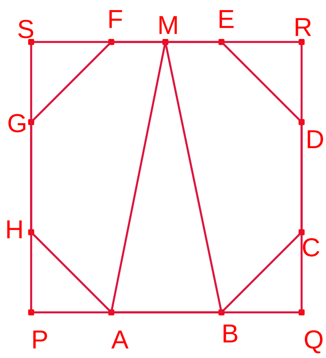


Solució 1:



L'àrea ombrejada de les tres figures és igual.
L'àrea de la tercera figura és la quarta part de l'octògon.

Solució 2:



Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB}=1$.
L'octògon regular està inscrit en el quadrat PQRS.
L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys l'àrea de 4 triangles rectangles i isòsceles iguals a $\overset{\Delta}{BQC}$
Si $\overline{BC}=1$, aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:

$$\overline{BQ}=\overline{CQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{PQ}=\overline{AB}+2\overline{BQ}=1+\sqrt{2}$$

L'àrea de l'octògon regular és:

$$S_{ABCDEFGH}=S_{PQRS}-4S_{BQC}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-4\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=2\left(1+\sqrt{2}\right).$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

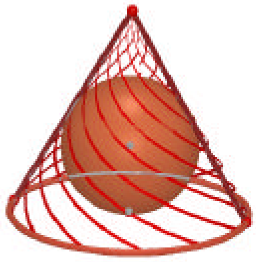
$$S_{ABM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{PS}}{2}=\frac{1\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

La proporció entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ i l'octògon és:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABCDEFGH}}=\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{4}.$$

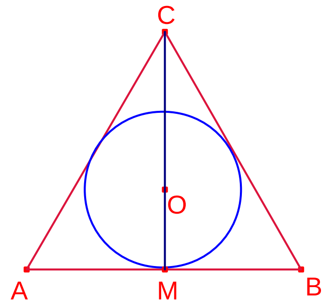
Nota: Si el polígon regular té 2n costats la proporció entre les àrees del triangle i el polígon regular és $\frac{1}{n}$.

473.- Siga un con tal que la generatriu i la base forma un angle de 60º.
Una esfera és tangent al con (la cara lateral i la base).
En quina proporció estan els seus volums.



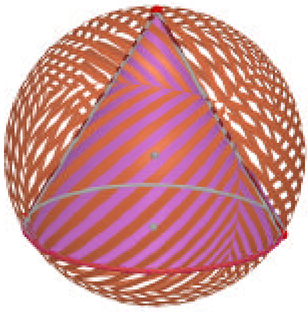
Solució:
Siga la secció perpendicular a la base que passa pel vèrtex del con.

Aquesta secció forma un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ i la secció de l'esfera es una circumferència tangent al triangle equilàter.
Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre del con.
$\overline{AM} = R$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
L'altura del con és: $\overline{AM} = R\sqrt{3}$.
Siga $r = \overline{OM}$ radi de l'esfera. $\angle OAM = 30^{o}$.
Aleshores, $\overline{AO} = 2r$, $\overline{AM} = r\sqrt{3}$.
$R = r\sqrt{3}$.
$r = \frac{\sqrt{3}}{3}R$.
El volum de l'esfera és:
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{\sqrt{3}}{9}R^3.$$
El volum del con és:
$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3.$$
La proporció entre els volums és:
$$\frac{V_{esfera}}{V_{con}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\frac{\sqrt{3}}{9}R^3}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3} = \frac{4}{9}.$$

474.- Siga un con tal que la generatriu i la base forma un angle de 60º.
Una esfera circumscrita al con.
En quina proporció estan els seus volums.

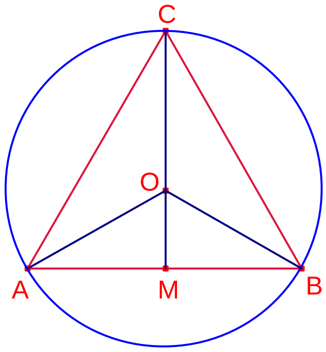


Solució:
Siga la secció perpendicular a la base que passa pel vèrtex del con.

Aquesta secció forma un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ i la secció de l'esfera es una circumferència circumscrita al triangle equilàter.

Siga $\overline{AB}=2R$ diàmetre del con.

$\overline{AM}=R$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

L'altura del con és: $\overline{AM}=R\sqrt{3}$.

Siga $r=\overline{OA}$ radi de l'esfera. $\angle OAM=30^{o}$.

Aleshores, $\overline{OM}=\frac{r}{2}$, $\overline{AM}=r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$R=r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$r=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi r^{3}=\frac{4}{3}\pi\frac{8\sqrt{3}}{9}R^{3}.$$

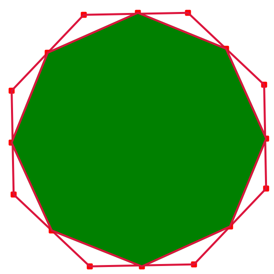
El volum del con és:

$$V_{con}=\frac{1}{3}\pi R^{2}R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^{3}.$$

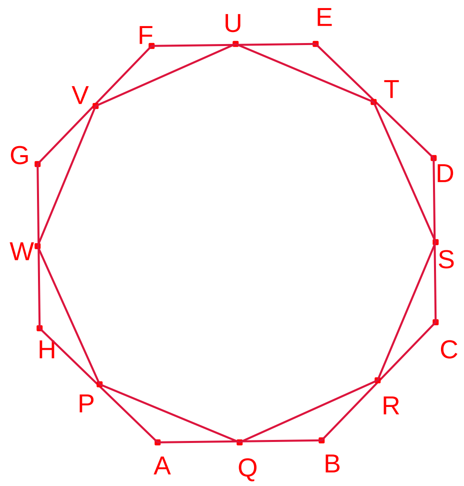
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{con}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\frac{8\sqrt{3}}{9}R^{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^{3}}=\frac{32}{9}.$$

475.- En els punts migs d'un octògon regular s'ha inscrit un altre octògon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees.



Solució:
Els dos octògons regulars són semblants.
La raó de les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança dels dos octògons.



Siga l'octògon ABCDEFGH de costat $\overline{AB} = c$
L'angle interior de l'octògon regular és $\angle HAB = 135^o$.
Siga PQRSTUVW l'octògon format pels punts migs dels costats.
$\overline{AP} = \overline{AQ} = \dfrac{c}{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PAQ}$:

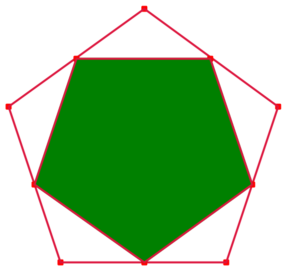
$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cos 135^o.$$

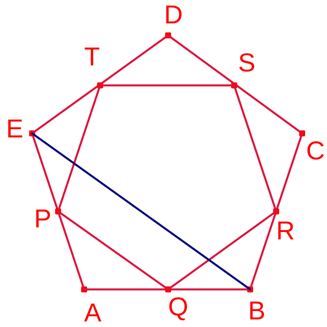
$$\overline{PQ}^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}c^2.$$

La proporció entre les àrees dels dos octògons regulars és:

$$\frac{S_{PQRSTUW}}{S_{ABCDEFGH}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

476.- En els punts migs d'un pentàgon regular s'ha inscrit un altre pentàgon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees.





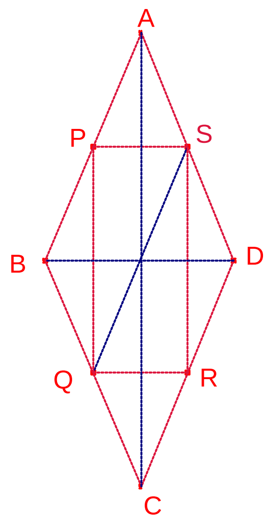
Solució:
Els dos pentàgons regulars són semblants.
La raó de les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança dels dos pentàgons.

Siga el pentàgon ABCDE de costat $\overline{AB} = c$.
La raó entre la diagonal d'un pentàgon regular i el costat és el nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Aleshores, la diagonal $\overline{BE} = a \cdot \Phi$.
$\overline{PQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$:
$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{\Phi}{2}a$.
La proporció entre les àrees dels dos pentàgons regulars és:

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\Phi}{2}a\right)^2}{a^2} = \frac{\Phi^2}{4} = \frac{1+\Phi}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} .$$

477.- Els segments que uneixen els punts migs d'un rombe mesuren 5 i 12. Calculeu el costat del rombe i la seua àrea.

Solució:
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars.
Siga el rombe ABCD.
Siguen P, Q, R, S els punts migs dels costats tal que:
$\overline{PQ} = 12$, $\overline{PS} = 5$.



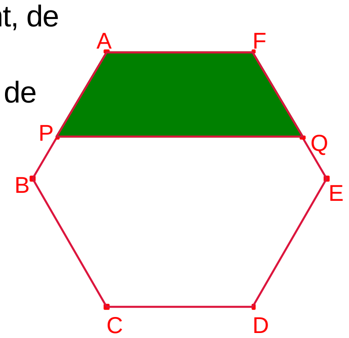
$\overline{PQ}$ i $\overline{PS}$ són paral·leles mitjanes dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$, respectivament.
Aleshores:
$\overline{PQ}$ i $\overline{PS}$ són perpendiculars i $\overline{AC} = 2\overline{PQ} = 24$, $\overline{BD} = 2\overline{PS} = 10$.
L'àrea del rombe ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = 120 .$$

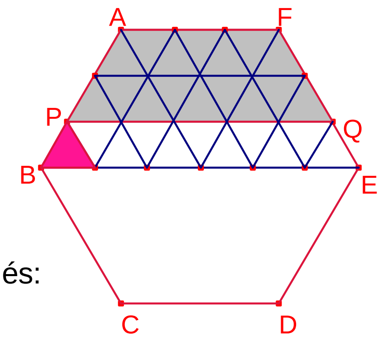
$\overline{QS}$ és paral·lela mitjana del rombe aleshores, $\overline{AB} = \overline{QS}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQS}$:
$\overline{AB} = \overline{QS} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

8.- Siguen P, i Q el punts dels costats $\overline{AB}$, $\overline{FE}$, respectivament, de l'hexàgon regular ABCDEF tal que $\overline{AP}=2\cdot\overline{BP}$, $\overline{FQ}=2\cdot\overline{EQ}$.
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter APQF i de l'hexàgon ABCDEF.



Solució:
Dividim els costats $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, $\overline{FE}$ en tres parts iguals (iguals a $\overline{BP}$).
$\overline{BE}=2\cdot\overline{AB}$.
Dividim la diagonal $\overline{BE}$ en sis parts iguals (iguals a $\overline{BP}$).
Al unir les parts el trapezi ABQF ha quedat dividit en 16 triangles equilàters i el trapezi ABEF en 27 triangles equilàters, tots iguals.
L'hexàgon ABCDEF estaria format per 54 dels anteriors triangles equilàters.
La proporció entre les àrees del trapezi APQF i l'hexàgon ABCEDF és:

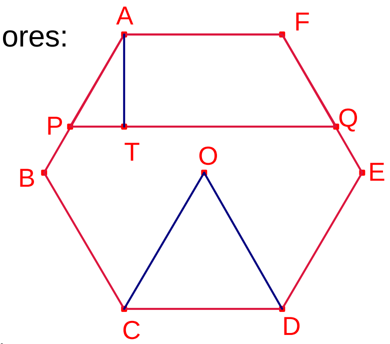


$$\frac{S_{APQF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{16}{54}=\frac{8}{27}.$$

Generalització:

Siguen P, i Q el punts dels costats $\overline{AB}$, $\overline{FE}$, respectivament, de l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB}=c$ tal que $\overline{AP}=\cdot\overline{FQ}=x$.
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter APQF i de l'hexàgon ABCDEF.

Solució:
Siga T la projecció de A sobre el segment $\overline{PQ}$. $\angle PAT=30^{\circ}$, aleshores:



$\overline{PT}=\frac{x}{2}$, $\overline{AT}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.
$\overline{PQ}=2\overline{PT}+\overline{AF}=x+c$.
L'àrea del trapezi APQF és:

$$S_{APQF}=\frac{\overline{PQ}+\overline{AF}}{2}\overline{AT}=\frac{x+c+c}{2}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{(2cx+x^2)\sqrt{3}}{4}.$$

Siga O el centre de l'hexàgon.
L'àrea de l'hexàgon és igual a sis vegades l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDO}$:

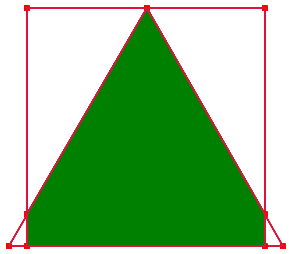
$$S_{ABCDEF}=6\cdot S_{CDO}=6\cdot\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}.$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter APQF i de l'hexàgon ABCDEF és:

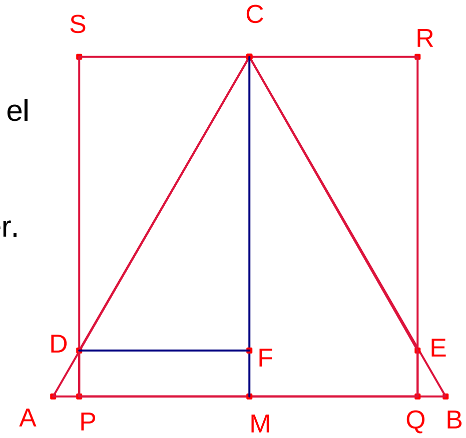
$$\frac{S_{APQF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{\frac{(2cx+x^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{6}\frac{x^2+2cx}{c^2}.$$

En el problema anterior $x=2$, $c=3$, $\frac{S_{APQF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{1}{6}\frac{x^2+2cx}{c^2}=\frac{8}{27}$.

479.- Calculeu l'àrea de la intersecció de les àrees del quadrat i el triangle equilàter si el costat del triangle equilàter és 4.
El quadrat té un costat sobre el costat del triangle equilàter i el punt mig del costat oposat és vèrtex del triangle equilàter.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga PQRS el quadrat tal que P, Q pertany al costat $\overline{AB}$ i C és el punt mig del costat $\overline{RS}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siguen D, E les interseccions de el quadrat i el triangle equilàter.
Siga F la projecció de D sobre $\overline{CM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{PQ} = \overline{CM} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{PM} = \overline{DF} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{4}.$$

$\overset{\Delta}{DFC}$ és un triangle equilàter tal que $\angle DCF = 30^{\circ}$, aleshores:

$$\overline{CD} = 2\cdot\overline{DF} = \frac{c\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD} = \frac{3c}{4}.$$

$$\overline{DP} = \overline{CM} - \overline{CF} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}c.$$

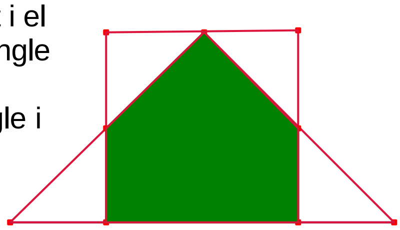
L'àrea del pentàgon PQECD és igual a la suma de l'àrea del triangle equilàter de costat $\overline{CD}$ i del rectangle PQED:

$$S_{PQCED} = S_{DEC} + S_{PQED} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{CD}^2 + \overline{PQ}\cdot\overline{DP} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{4}c\right) = \frac{12-3\sqrt{3}}{16}c^2.$$

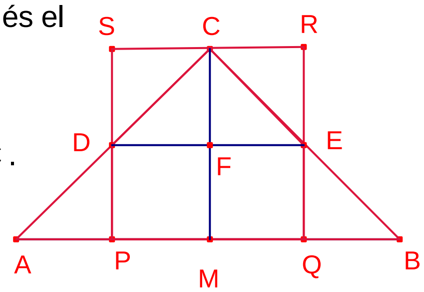
Si $c = 4$, $S_{PQCED} = \frac{12-3\sqrt{3}}{16}4^2 = 12 - 3\sqrt{3} \approx 6'80$.

480.- Calculeu l'àrea de la intersecció de les àrees del quadrat i el triangle rectangle i isòsceles si la hipotenusa del triangle rectangle és 4.
El quadrat té un costat sobre la hipotenusa del triangle rectangle i el punt mig del costat oposat és vèrtex del triangle.



Solució:

Siga el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $C=90^{\circ}$ d'hipotenusa $\overline{AB}=c$.
Siga PQRS el quadrat tal que P, Q pertany al costat $\overline{AB}$ i C és el punt mig del costat $\overline{RS}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siguen D, E les interseccions de el quadrat i el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



El triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ és rectangle i isòsceles aleshores:

$$\overline{PQ}=\overline{CM}=\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{c}{2}.$$

$$\overline{PM}=\frac{\overline{PQ}}{2}=\frac{c}{4}.$$

$$\overline{AP}=\overline{AM}-\overline{PM}=\frac{c}{4}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és rectangle i isòsceles aleshores:

$$\overline{PD}=\overline{AP}=\frac{c}{4}.$$

Siga F la projecció de D sobre $\overline{CM}$.
PMFD és un quadrat.

L'àrea del pentàgon PQECD és igual a tres vegades l'àrea del quadrat PMFD

$$S_{PQCED}=3\cdot S_{PMFD}+S_{PQED}=3\cdot\overline{PM}^2=3\left(\frac{c}{4}\right)^2=\frac{3}{16}c^2.$$

Si $c=4$, $S_{PQCED}=\frac{3}{16}4^2=3$.