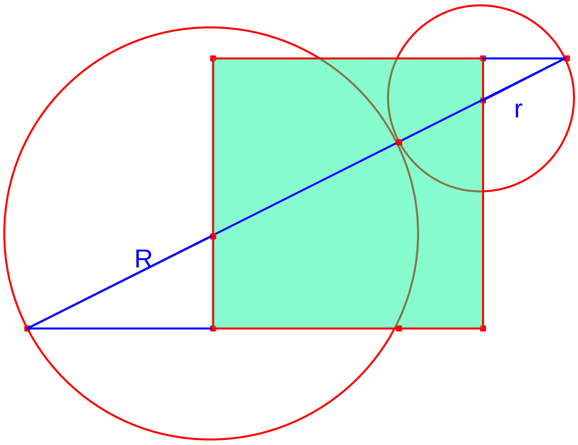
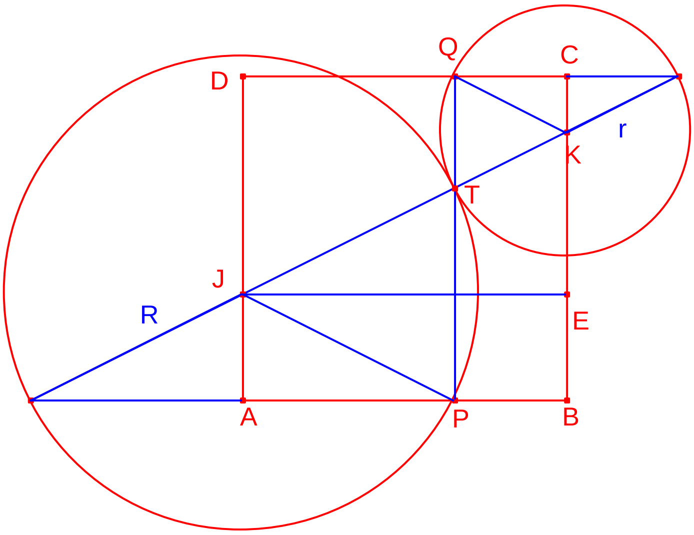
4791.- La figura està formada per un quadrat i dues circumferències tangents de radis R, r. Proveu que l'àrea del quadrat és:

$$S_{quadrat} = \frac{4}{5}(R+r)^2$$



Solució:



AB=c

AJ=a, CK=b

P, T, Q alineats

PT=2a,QT=2b

2(a+b)=c

JE=c

JK=R+r

KE=c-(a+b)=c/2

Teorema Pitàgores JEK

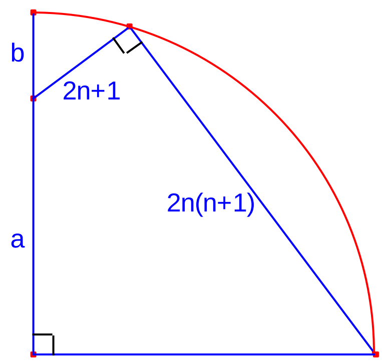
$(R+r)^2=c^2+(c/2)^2$

$[ABCD]=c^2=(4/5)(R+r)^2$

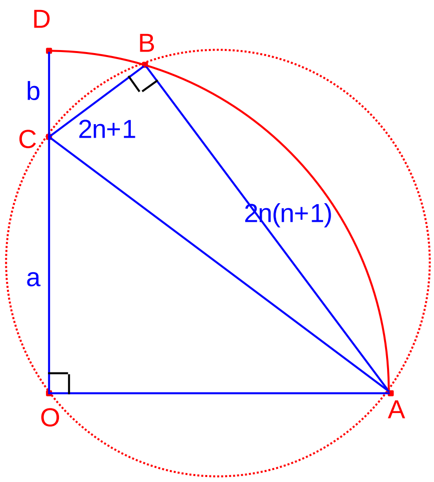
4792.- La figura està formada per un quadrant i dos segments perpendiculars de longituds $2n+1, 2n(n+1)$

Calculeu la proporció:

$\frac{a}{b}$



Solució:



Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB} = a + b$

Siga $\overline{BC} = 2n + 1, \acute{A}B = 2n(n + 1)$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és pitagòric de costats,

$\overline{AB} = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \overline{AC} = (n+1)^2 - n^2 = 2n^2 + 2n + 1, \overline{AB} = 2(n+1)n$

El quadrilàter $OABC$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

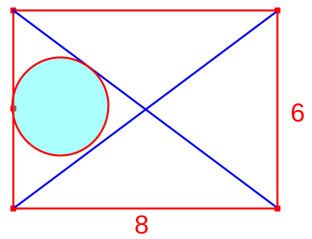
$(2n+1)(a+b) + 2n(n+1)a = (a+b)(2n^2 + 2n + 1)$

Simplificant:

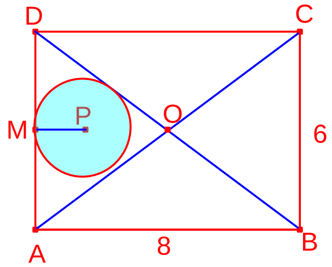
$(n+1)a = n(a+b)$

$\frac{a}{b} = n$

4793.- En un rectangle de costats 8, 6 s'han dibuixat les diagonals.
Calculeu l'àrea del cercle ombrejat.

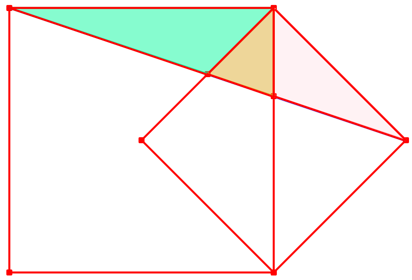


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 8, \overline{AD} = 6$ i centre O.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$.
$\overline{BD} = 10$
$\overline{OA} = \overline{OD} = 5$
Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AOD}$ de centre P i radi $\overline{PM} = r$
$\overline{OM} = 4$

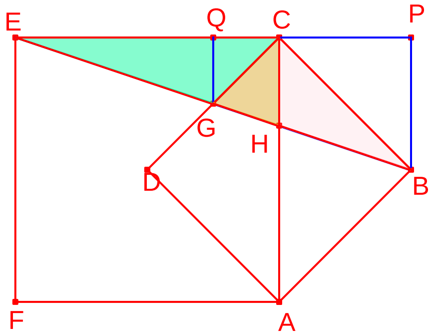


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOD}$ és:
$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \frac{6+5+5}{2} r$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{3}{2}$$
L'àrea del cercle és:
$$S_{cerccle} = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$$

4794.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció d'àrees:
$[verda] : [groga] : [rosa]$



Solució:



AB=1

AC=c·sqrt(2)
x=CH

BP=CP=sqrt(2)/2

EP=(3/2)sqrt(2)

PB/EP=1/3

x=CH=(1/3)sqrt(2)

CQ=GQ=y

EQ=sqrt(2)-y

GQ=(1/3)(sqrt(2)-y)=y
y=(1/4)sqrt(2)

[CHB]=(1/2)CH·PC=1/6

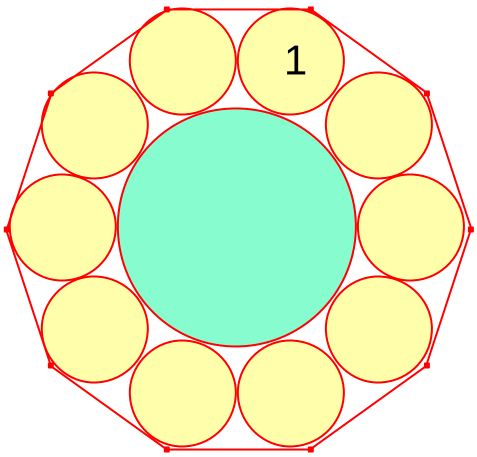
[ECG]=(1/2)EC·GQ=1/4

[ECH]=(1/2)EC·CH=1/3

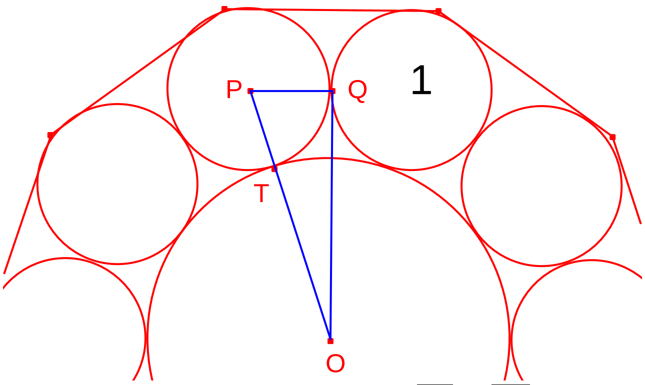
[CGH]=[ECH]-[ECG]=1/12

[ECG] : [CGH] : [CHB] = 3 : 1 : 2

4795.- En un decàgon regular s'han inscrit 10 cercles grocs tangents d'àrea 1.
Calculeu l'àrea del cercle verd tangent als 10 cercles grocs.



Solució:



Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$ i àrea 1.
Siga el cercle verd de centre O i radi $\overline{OT} = R$
$\angle POT = 18°$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:

$$\frac{r}{R+r} = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Resolent l'equació:

$$\frac{R}{r} = \sqrt{5}$$

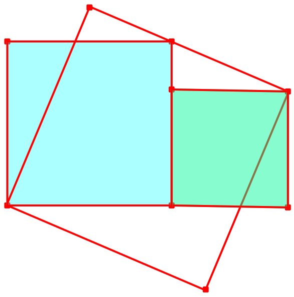
La proporció d'àrees entre les àrees dels cercles verd i groc és:

$$\frac{S_O}{1} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 5$$

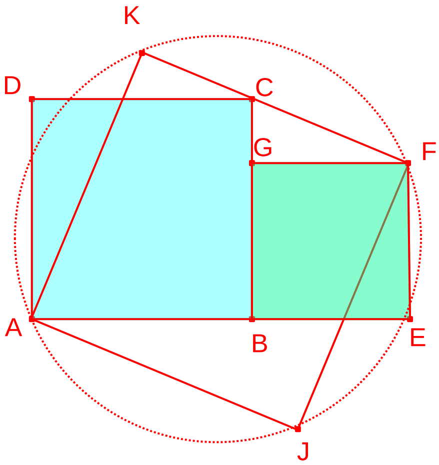
L'àrea del cercle verd és:

$$S_O = 5$$

4796.- La figura està formada per tres quadrats.
El quadrat blau té àrea 100.
Calculeu l'àrea del quadrat verd



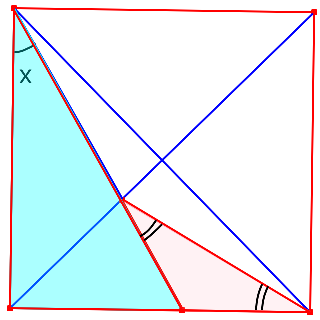
Solució:



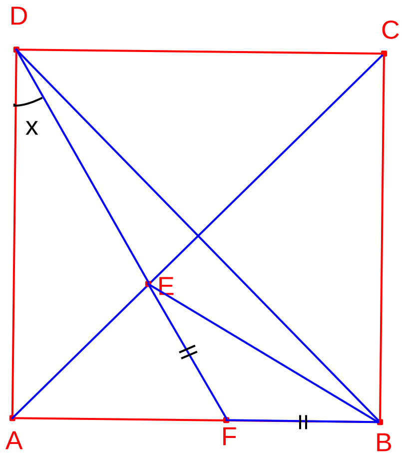
AB=10
BE=c
AJ=d

AJEFK cíclic
angleAEJ=angleKEF=45º
angleEKF=angleEAJ
AJE, KFE són iguals
AE=KE=10+c
Teorema Tolomeu AEFK
cd+(10+c)d=(10+c)·d·sqrt(2)
c=5·sqrt(2)
[BEFG]=c²=50

4797.- La figura està formada pler un quadrat amb les seues diagonals i dos triangles.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleAEF=x

AB=AD, angleBAE=angleDAE=45º

els triangles ABE, AED són iguals

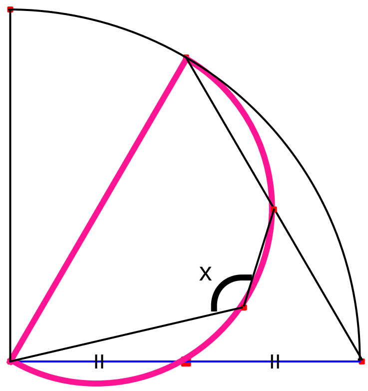
angle ABE=angle ADE=x

angleFEB=x

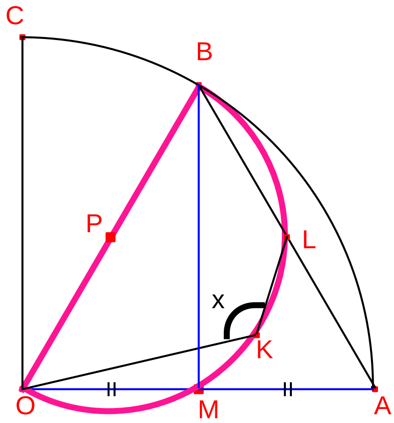
angleAFE=2x

x+2x=90º
x=30º

4798.- La figura està formada per un quadrant i una semicircumferència.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:



AngleOMB=90º

OB=2·OM

AngleBOM=60º

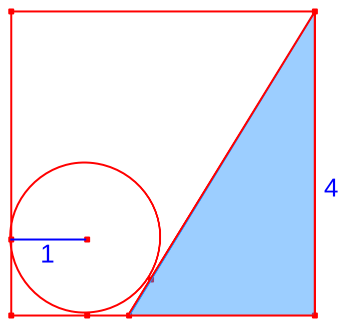
OAB equilàter

AngleMBL=30º

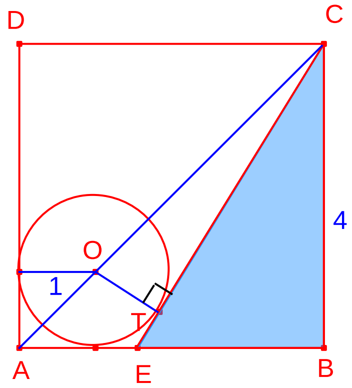
AngleBOL=30º

AngleOKL=angleOML=30º+90º=120º

4799.- La figura està formada per un quadrat de costat 4, una circumferència de radi 1 tangent a dos costats del quadrat i un triangle amb un costat tangent a la circumferència.
Calculeu l'àrea del triangle



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = 1$
$\overline{AC} = 4\sqrt{2}, \overline{AO} = \sqrt{2}$
$\overline{OC} = 3\sqrt{2}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:
$\overline{CT} = \sqrt{17}$
Siga $\alpha = \angle OCT$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\tan(45° - \alpha) = \frac{9 - \sqrt{17}}{8}$$

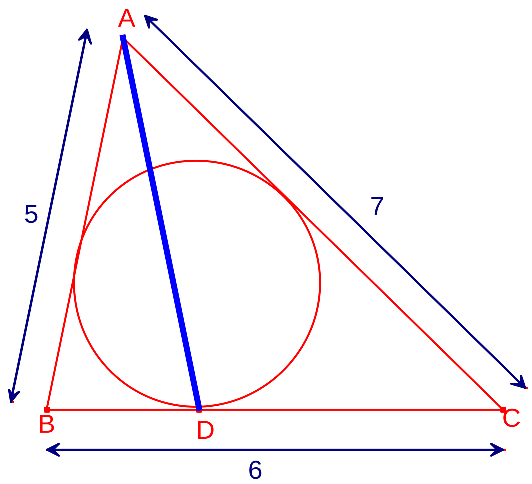
$$\frac{\overline{EB}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{8}$$

$$\overline{EB} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és:

$$S_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot 4 = 9 - \sqrt{17}$$

4800.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats
$a = 6, b = 7, c = 5$
Siga D el punt de tangència de la circumferència inscrita l triangle i el costat $\overline{BC}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AD}$



Solució:

$$\overline{BD} = \frac{a + c - b}{2} = 2$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = 9$$

Siga $\overline{CH} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$$

$$h = 2\sqrt{6}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$\overline{BH} = 1$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles:

$$\overline{AD} = \overline{AB} = 5$$