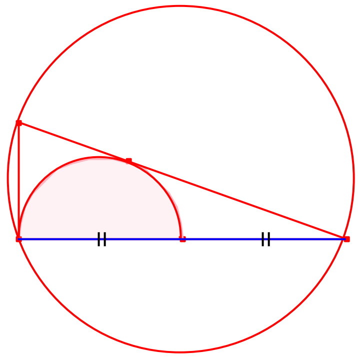
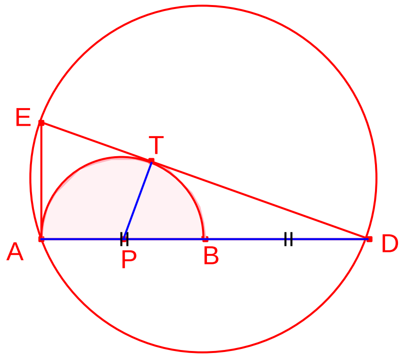
4801.- La figura està formada per una circumferència que conté un triangle rectangle i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle.



Solució:
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PT} = r$
$\overline{BD} = 2r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTD}$:
$\overline{DT} = 2r\sqrt{2}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAD}, \overset{\Delta}{PTD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AE}}{r} = \frac{4r}{2r\sqrt{2}}$$

$$\overline{AE} = r\sqrt{2}$$

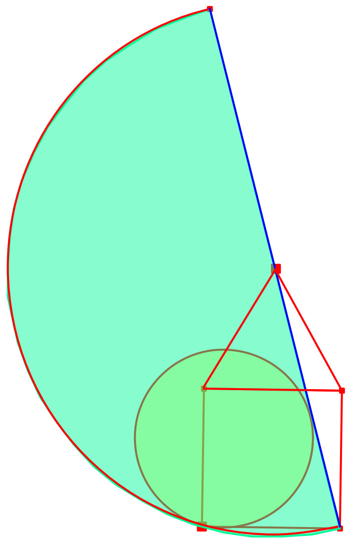
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EAD}$:
$2R = \overline{DE} = 3r\sqrt{2}$, diàmetre de la circumferència exterior.

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{semicercle}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{R^2} = \frac{1}{9}$$

4802.- La figura està formada per un quadrat un triangle equilàter una semicircumferència i una circumferència tangent a la semicircumferència i al seu diàmetre.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $\overline{OB} = R$ radi de la semicircumferència.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCO}$:

$$R^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\angle OAB = 30°$$

Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PT} = r$

$$\overline{OP} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - r$$

$$\frac{r}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - r} = \frac{1}{2}$$

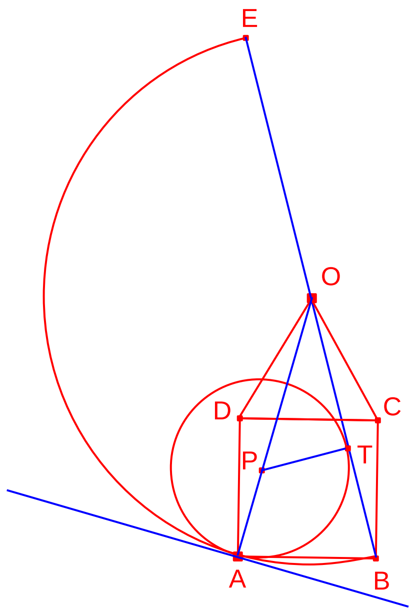
$$R = \frac{1}{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

La proporció entre l'àrea del cercle i del semicercle és:

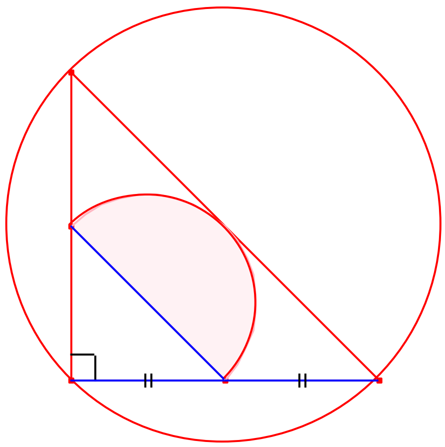
$$\frac{S_{semi}}{S_{cercle}} = \frac{r^2}{\frac{1}{2}R^2} = \frac{2}{9}$$

La proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea total és:

$$\frac{S_{semi}}{S_{Total}} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\pi\frac{1}{9}\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\frac{1}{2}\pi\left(2 + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}} \approx 0.2131$$



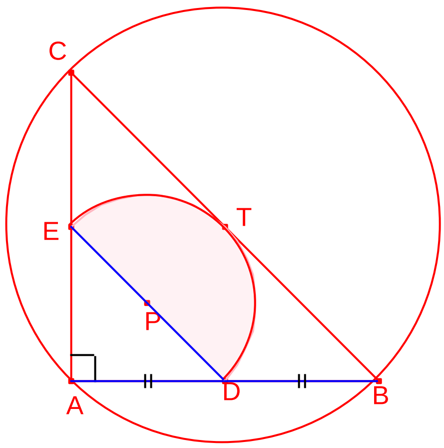
4803.- En la figura un triangle està circumscrit a una circumferència.
el triangle conté una semicircumferència tangent a la hipotenusa.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle.



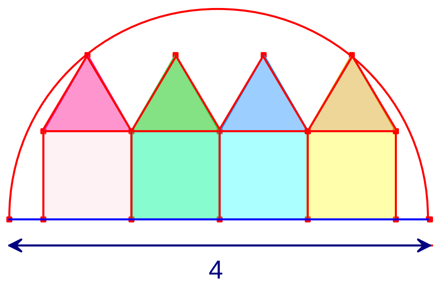
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BC} = 2R$, diàmetre de la circumferència circumscrita.
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{DE} = 2r$
El diàmetre $\overline{DE}$ és paral·lel a la hipotenusa $\overline{BC}$
$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{DE} = 4r$
$R = 2r$
La proporció d'àrees és:

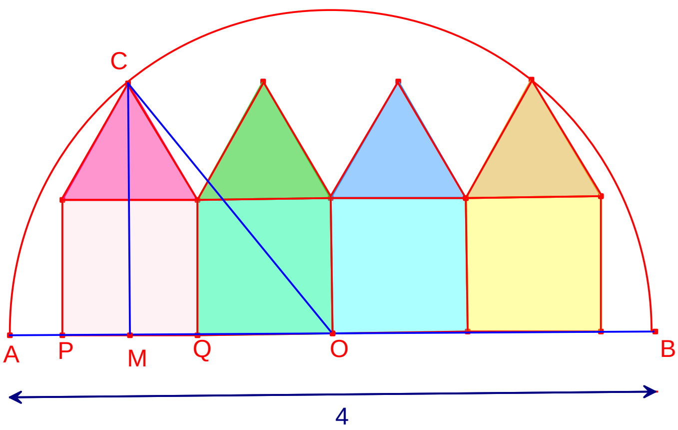
$$\frac{S_{semicercle}}{S_{cerccle}} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{R^2} = \frac{1}{8}$$



4804.- La figura està formada per una semicercle de diàmetre 4 i quatre quadrats i quatre triangles equilàters.
Calculeu l'àrea total ombrejada.



Solució:



OC=4
PQ=c
CM=(1+sqrt(3)/2)c
OM=3/2·c

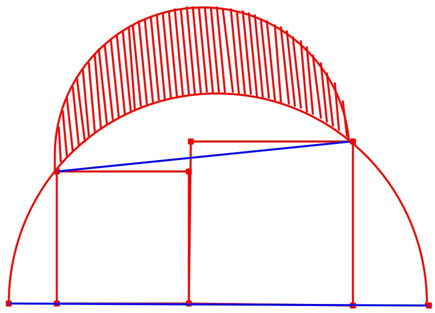
Teorema Pitàgores CMO

$c^2=4/(4+\text{sqrt}(3))$

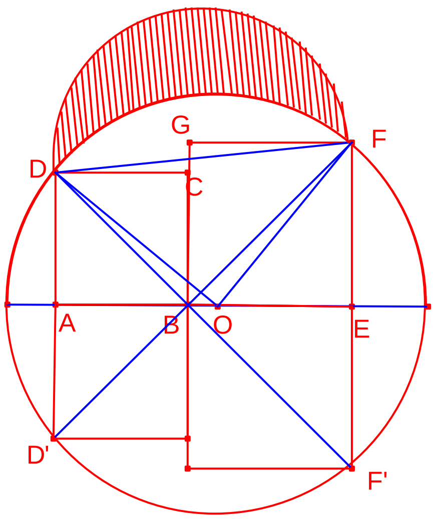
$[\text{Total}]=(4+\text{sqrt}(3))\cdot c^2=4$

4805.- La figura està formada per dues semicircumferències la gran de radi 2 i dos quadrats.

Calculeu l’àrea de la zona ombrejada.



Solució:



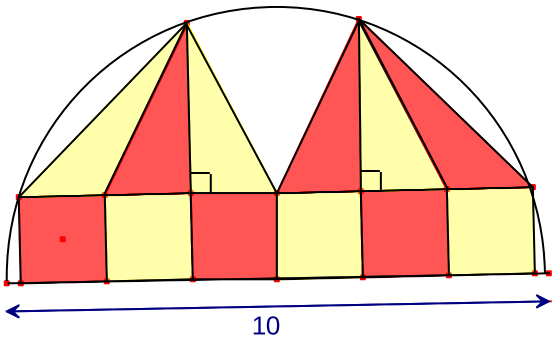
arc DD'+arc FF'=180º

angleDOF=90º

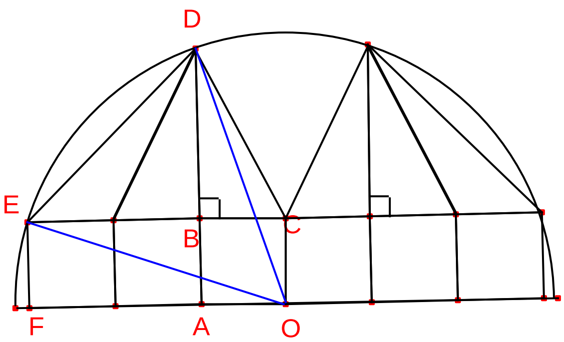
DF=2·sqrt(2)

[reed]=[DOF]=2

4806.- La figura està formada per una semicercle de diàmetre 10 i sis quadrats i sis triangles.
Calculeu l'àrea total ombrejada.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre 10
Siga el quadrat $ABCO$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{BD} = h$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFO}$

$c^2 + 9c^2 = 25$

$c^2 = \frac{5}{2}, c = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAO}$

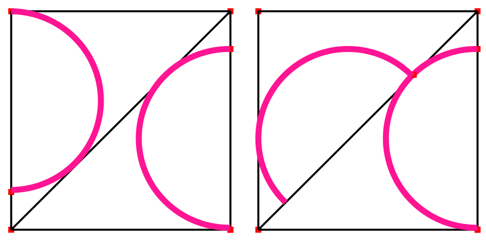
$c^2 + (c+h)^2 = 25$

$h = \sqrt{10}$

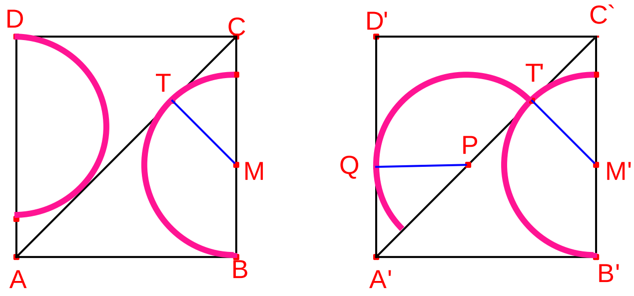
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 6 \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot 6c \cdot h = 6 \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{10} = 30$$

4807.- Els dos quadrats de la figura són iguals.
Els radis de les quatre semicircumferències són iguals



Solució:



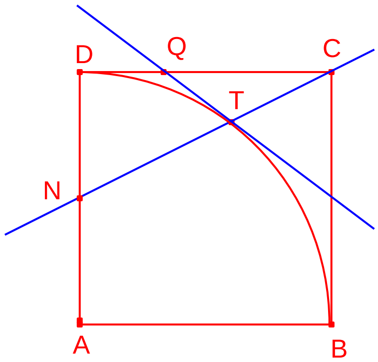
Siga el quadrat $A'B'C'D'$ de costat $\overline{A'B'} = 1$
Siga la semicircumferència de centre M' i radi $\overline{M'T'} = \overline{M'B'} = r$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PT'} = s$

$\overline{C'T'} = \overline{M'T'} = r$

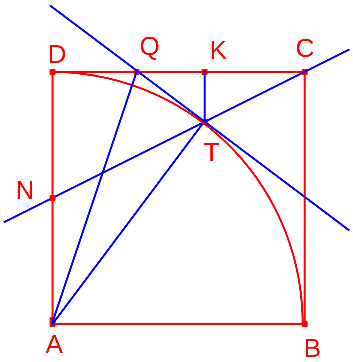
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{C'T'M'}$:
$\overline{C'M'} = r\sqrt{2}$
$\overline{C'M'} = 1 - r = r\sqrt{2}$
$r = \sqrt{2} - 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'QP}$:
$\overline{A'P} = s\sqrt{2}$
$\overline{PT'} = \sqrt{2} - r - s\sqrt{2} = s$
$s = \sqrt{2} - 1$
Les quatre semicircumferències tenen el mateix radi.

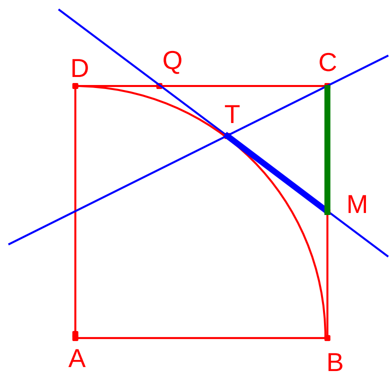
4808.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$, i un quadrant.
Siga $\overline{CQ} = 2 \cdot \overline{DQ}$
T és el punt de tangència de la recta QT i el quadrant
Proveu que $\overline{AN} = \overline{DN}$



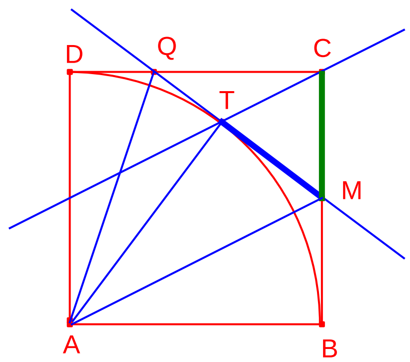
Solució:
Siga $\overline{CQ} = \overline{QT} = a,\ \overline{DQ} = 2a, \overline{AB} = \overline{AT} = 3a$
Siga $\angle QAT = \alpha$
$\angle CQT = 2\alpha$
$\tan \alpha = \frac{1}{3}$
$\tan 2\alpha = \frac{3}{4}, \sin 2\alpha = \frac{3}{5}, \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$
Siga K la projecció de T sobre $\overline{CD}$
$\frac{\overline{QK}}{a} = \cos 2\alpha , \frac{\overline{KT}}{a} = \sin 2\alpha$
$\overline{QK} = \frac{4}{5}a, \overline{KT} = \frac{3}{5}a$
$\overline{CN} = 3a - \left(a + \frac{4}{5}a\right) = \frac{6}{5}a$
Els triangles rectangles $N\overset{\Delta}{D}C, T\overset{\Delta}{K}C$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{DN}}{3a} = \frac{\frac{3}{5}a}{\frac{6}{5}a} = \frac{1}{2}$
$\overline{DN} = \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}\overline{AD}$
Aleshores, $\overline{AN} = \overline{DN}$



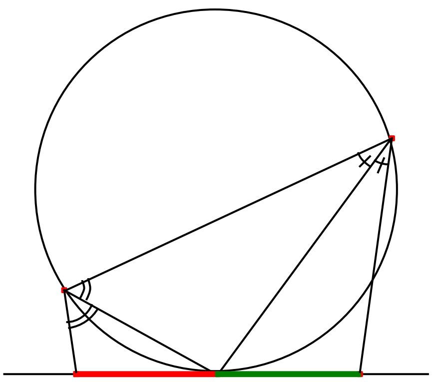
4809.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$, i un quadrant.
Siga $\overline{CQ} = 2 \cdot \overline{DQ}$
T és el punt de tangència de la recta QM i el quadrant
Proveu que $\overline{TM} = \overline{CM}$



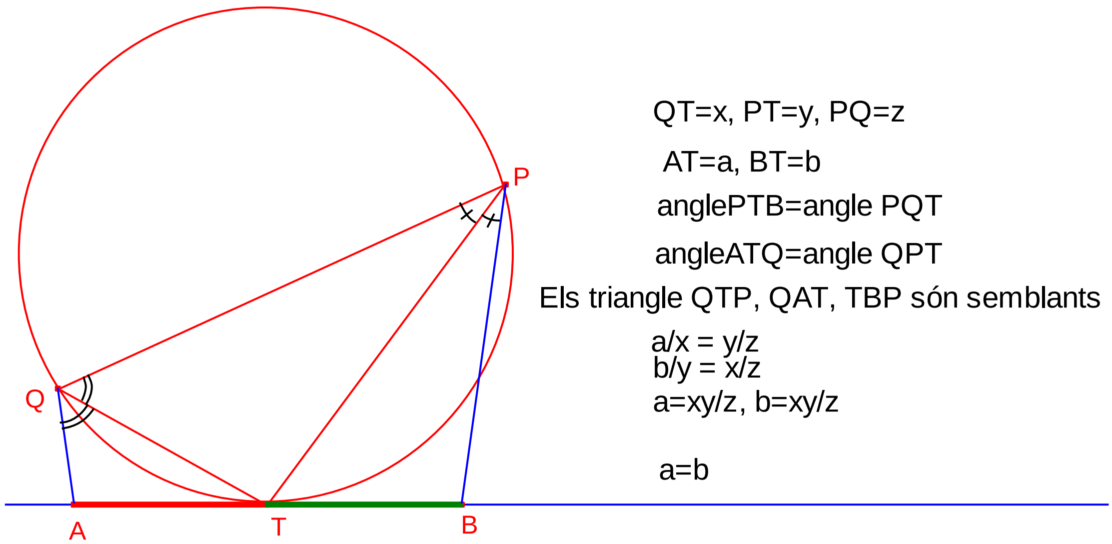
Solució:
Siga $\overline{CQ} = \overline{QT} = a,\ \overline{DQ} = 2a, \overline{AB} = \overline{AT} = 3a$
Siga $\angle QAT = \alpha$
$\angle CQT = 2\alpha$
$\tan \alpha = \frac{1}{3}$
$\angle TAM = 45° - \alpha$
$$\tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$
$\overline{TM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot 3a, = \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}\overline{BC}$
$\overline{DN} = \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}\overline{AD}$
$\overline{TM} = \overline{CM}$



4810.- La figura està formada per un triangle inscrit en una circumferència, una recta tangent a la circumferència en un dels vèrtexs del triangle i dues bisectrius.
Calculeu la proporció entre les mesures dels segments roig i verd.



Solució:



QT=x, PT=y, PQ=z

AT=a, BT=b

anglePTB=angle PQT

angleATQ=angle QPT

Els triangle QTP, QAT, TBP són semblants

a/x = y/z
b/y = x/z
a=xy/z, b=xy/z

a=b