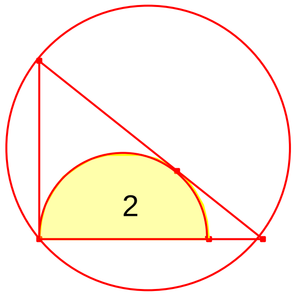
4811.- En la figura, l'àrea del semicercle ombrejat és 2.
El semicercle està inscrit en un triangle rectangle.
Calculeu l'àrea mínima del cercle circumscrit al triangle rectangle.



Solució:

Siga el triangle rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BC} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PT} = r$

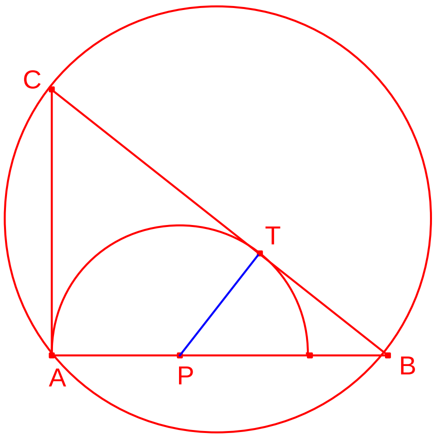
$$\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = 2$$

Siga $a = \overline{BP}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{TBP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = \frac{a + r}{2R}$$

$$2R = \frac{a(a + r)}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$



L'àrea del cercle circumscrit al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_O = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi \frac{a^2(a + r)^2}{a^2 - r^2}$$

Considerem la funció:

$$f(a) = \frac{a^2(a + r)^2}{a^2 - r^2}$$

$$f'(a) = \frac{2a^2 + 2ra^4 - 4r^2a^3 - 6r^3a^2 - 2r^4a}{(a^2 - r^2)^2}$$

$$f'(a) = 0$$

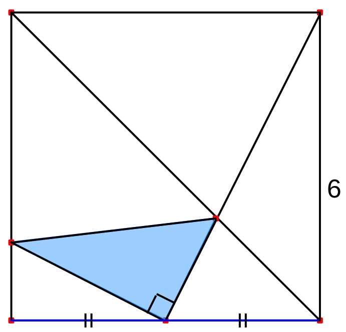
$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r$$

$$f"\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} r\right) > 0$$

La superfície mínima és:

$$S_{màx} = \Phi^5$$

4812.- La figura està formada per un quadrat de costat 6. Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.



Solució:

$\overline{BM} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$:

$\overline{CM} = 3\sqrt{5}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{KAM}$ són semblants i de raó $2 : 1$

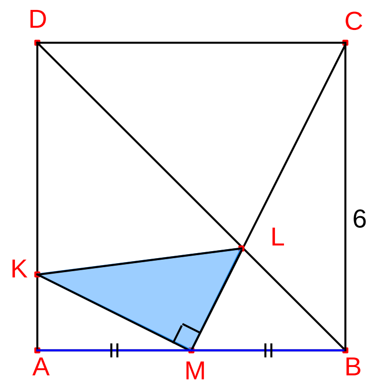
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{CM} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBL}, \overset{\Delta}{CDL}$ són semblants i de raó $1 : 2$

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{ML} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \sqrt{5}$$

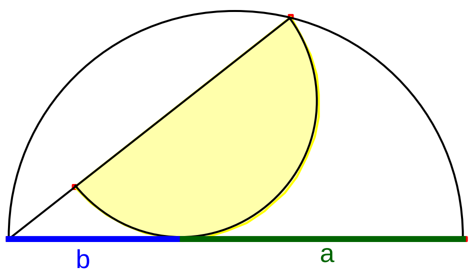


L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{15}{4}$$

4813.- En la figura la proporció entre l'àrea del semicercle ombrejat i l'àrea del gran és màxima Calculeu la proporció:

$\frac{a}{b}$



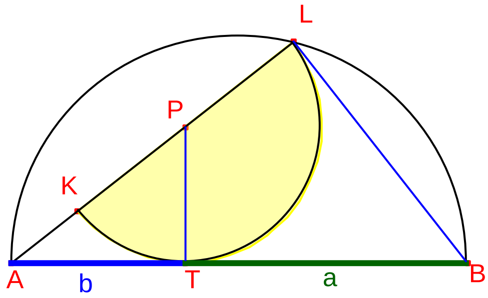
Solució:

El radi de la semicircumferència gran és:

$R = \frac{a+b}{2}$

Siguen $\overline{PK} = \overline{PL} = r$

$\overline{BL} = \overline{BT} = a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$\overline{AP} = \sqrt{r^2 + b^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}, \overset{\Delta}{ALB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}} = \frac{a}{a+b}$

$r^2 = \frac{a^2 b}{2a+b}$

La proporció entre les àrees dels dos semicercles és:

$$\frac{S_P}{S_{gran}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{4a^2 b}{(a+b)^2(2a+b)} = \frac{4\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) + 1\right)\left(2\left(\frac{a}{b}\right) + 1\right)}$$

Considerem la funció:

$f(x) = \frac{4x^2}{(x^2+2x+1)(2x+1)}$

$f'(x) = \frac{-8x(x^3+3x+1)}{(2x^3+5x^2+4x+1)^2}$

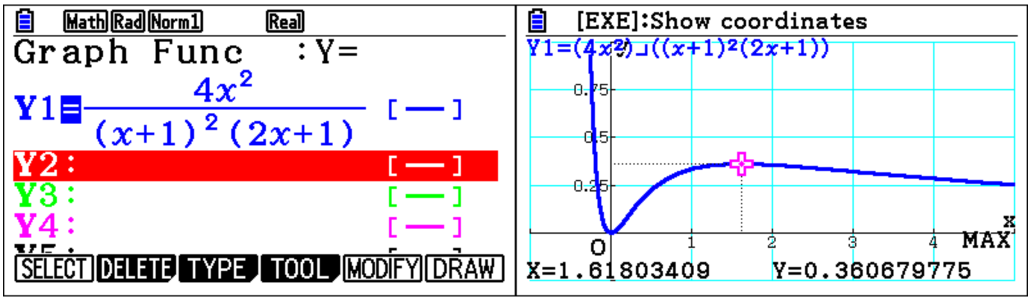
$f'(x) = 0$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

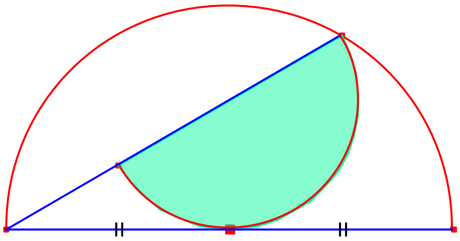
$f"\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$

El màxim de la proporció d'àrees s'assoleix quan x= $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

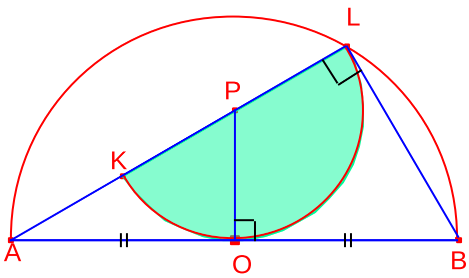
$\frac{a}{b} = \Phi$



4804.- La figura està formada per dos semicercles.
Calculeu la proporció entre les seues àrees.



Solució:

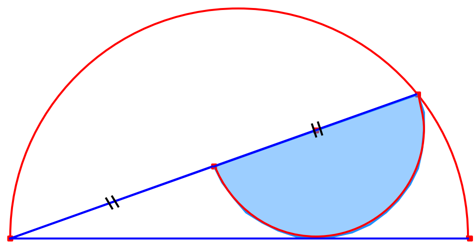


OA=OB=R
PO=r
BL=BO=R

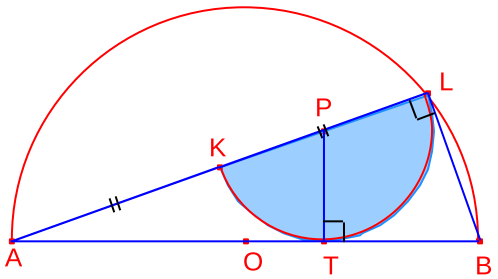
angleLAB=30º
r/R=tan 30º= sqrt(3)/3

Proporció àrees = 1/3

4815.- En la figura calculeu la proporció entre les àrees dels dos semicercle



Solució:



$AB=2R$

$PL=PK=r$

$AL=4r$

$a=BT=BL$

ATP, ALB son semblants

$a/4r=r/(2R-a)$

Teorema Pitàgores ALB

$4R^2=a^2+16r^2$

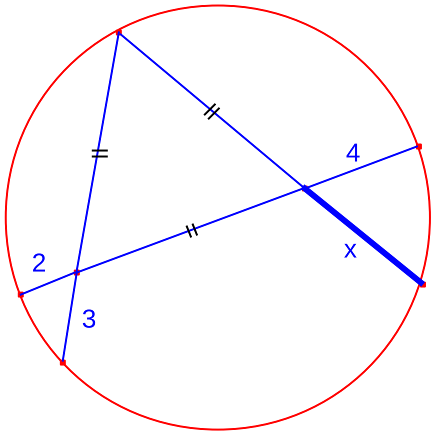
$\text{sqrt}(R^2-4r^2)/r=r/(R-\text{sqrt}(R^2-4r^2))$

$9r^2=2R^2$

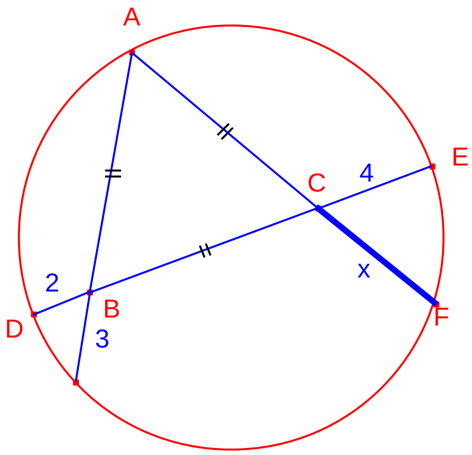
La proporció d'àrees és:

$r^2/R^2=2/9$

4816.- La figura està formada per una circumferència i tres cordes.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



Siga AB=BC=AC=c

Aplicant la potència de B respecte de la circumferència

3c=2·(c+4)

c=8

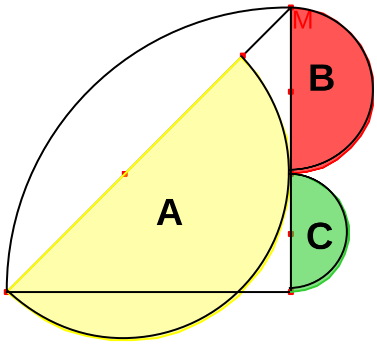
Aplicant la potència de C respecte de la circumferència

8x=4·(2+c)

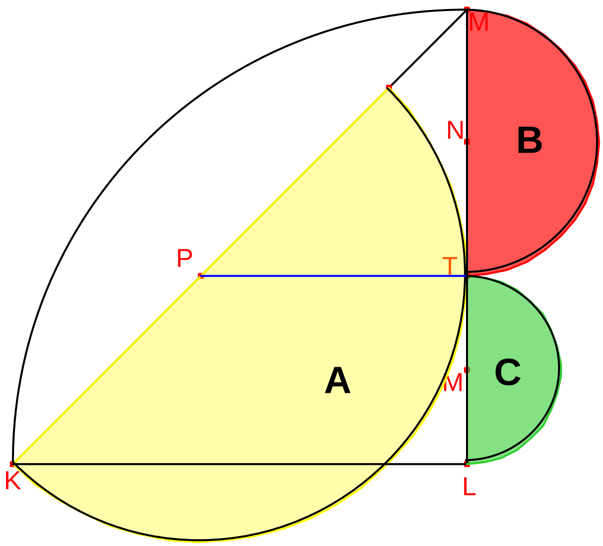
8x=40

x=5

4807.- La figura està formada per un quadrant i tres semicercles.
Calculeu la proporció d'àrees $A : B : C$



Solució:



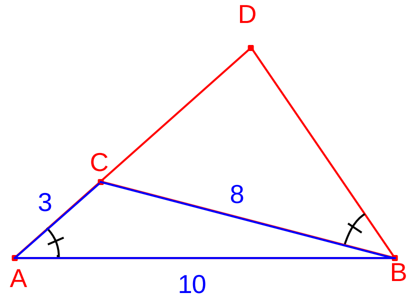
ML=1

PK=2·sqrt(2)

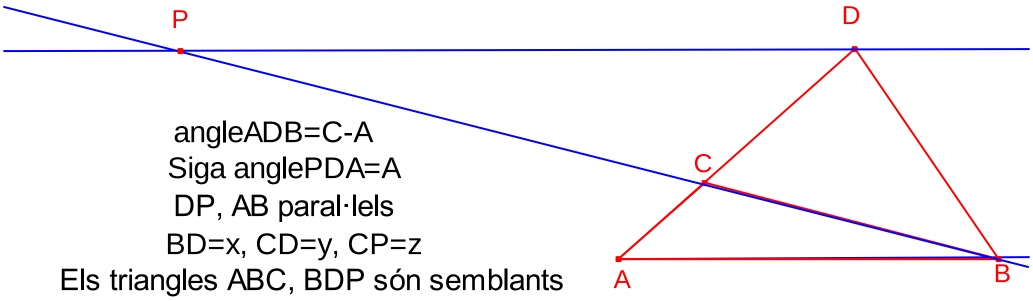
NT=sqrt(2)

A : B : C = 8 : 2 :1

4818.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té costats $\overline{AB} = 10,\ \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 8$, a més a més, $\angle CBD = \angle CAB$.
Calculeu la mesura del perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$



Solució:



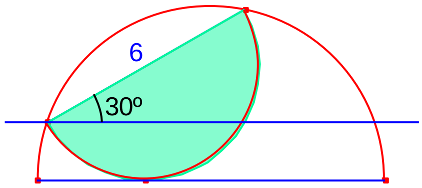
angleADB=C-A
Siga anglePDA=A
DP, AB paral·lels
BD=x, CD=y, CP=z
Els triangles ABC, BDP són semblants
x/(8+z) = 3/10
Els triangles ABC, DCP són semblants
z/8 = y/3
5x-4y = 12

Teorema dels sinus BDC
x/y = 10/8
4x-5y = 0

x = 20/3, y = 16/3

Perim.ABD 10+3+x+y = 25

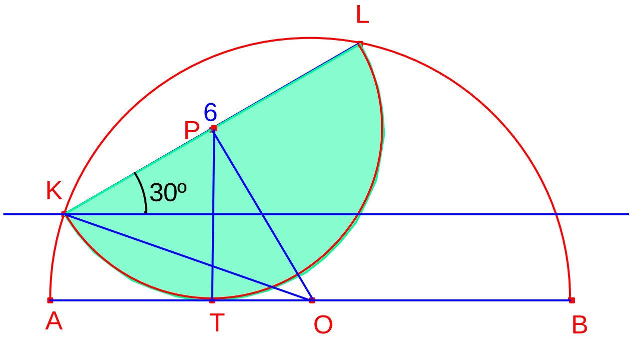
4819.- La figura està formada per dos semicercles.
el menut té diàmetre 6 i és tangent al diàmetre del gran.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.



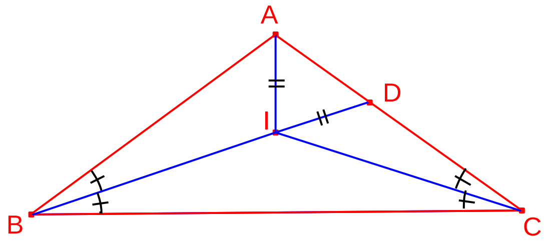
Solució:
Siga el semicercle de centre P i diàmetre $\overline{KL} = 6$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OK} = r$
Siga $a = \overline{OP}$
$\overline{PT} = 3, \angle TPO = 30°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PTO}$:
$a = 2\sqrt{3}$

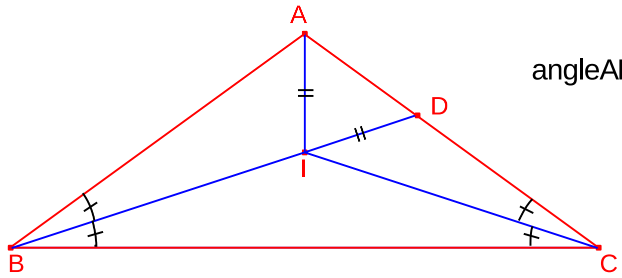
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{KPO}$:
$r = \sqrt{21}$
L'àrea del semicercle gran és:
$S_O = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = \frac{21}{2}\pi$



4820.- En la figura, $\angle ABI = \angle IBC = \angle BCI = \angle ICA$
Calculeu la proporció:
$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$



Solució:



angleABI=angleIBC=angleBCI=angleICA=a

angleIDA=angleIAD=3a

angleIAD=angleIAB=3a

angleAIB=6a

10a=180º

AngleABC=angleBCA=36º

AB=1, BC=phi

BD=x, AD=1-x

teorema bisectriu

x/phi = 1-x

x=1/phi

AC / CD = phi