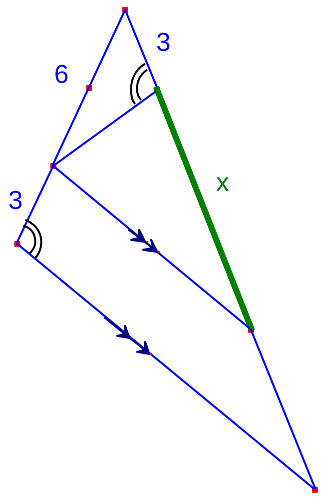
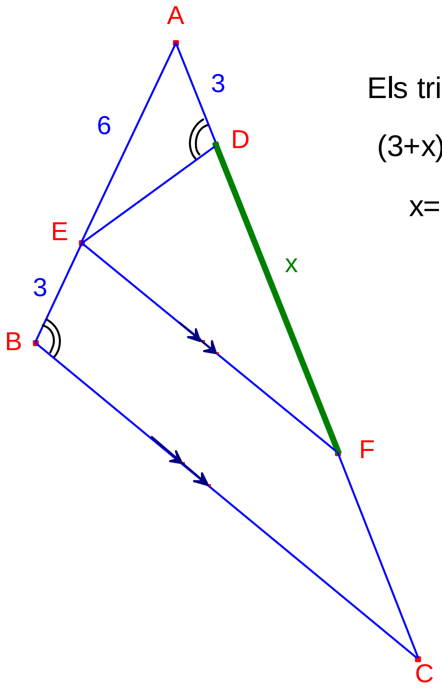
Problemes de Geometria per a l'ESO 483

4821.- En la figura calculeu la mesura del segment x



Solució:

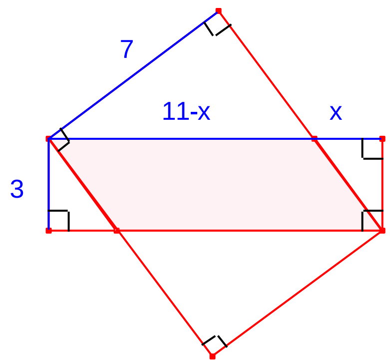


Els triangles AEF, ADE són semblants

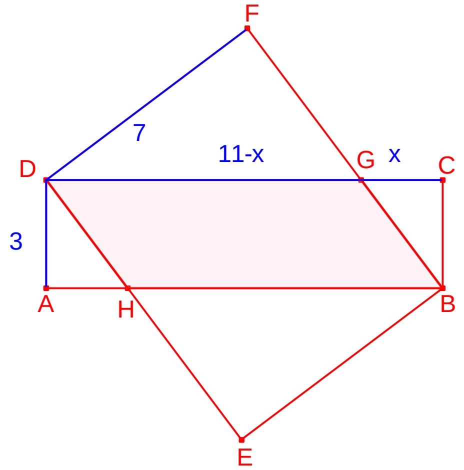
(3+x)/6 = 6/3

x=9

4822.- La figura està formada per dos rectangles.
Calculeu l'àrea ombrejada, comuna als dos rectangles.



Solució:



CG=AH=x

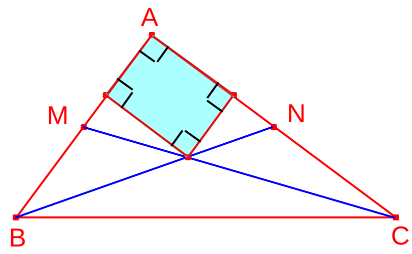
Els triangles rectangles BCG, DFG són semblants

x/3 = sqrt(x²-22x+72)/7

x=9/4

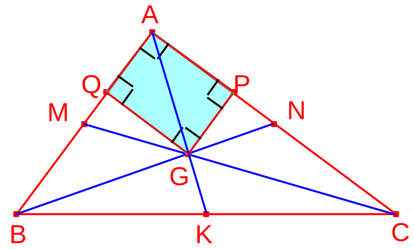
[BGDH]=(11-x)3=105/4

4823.- En la figura $\overline{AB} = 9, \overline{AC} = 12, \overline{AM} = \overline{BM}, \overline{AN} = \overline{CN}$
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



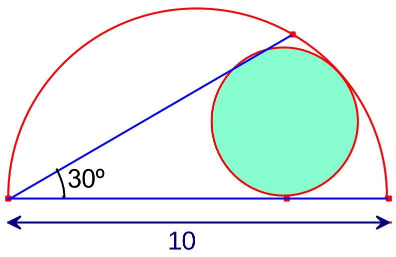
Solució:

La intersecció de BN i CM és el baricentre G del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

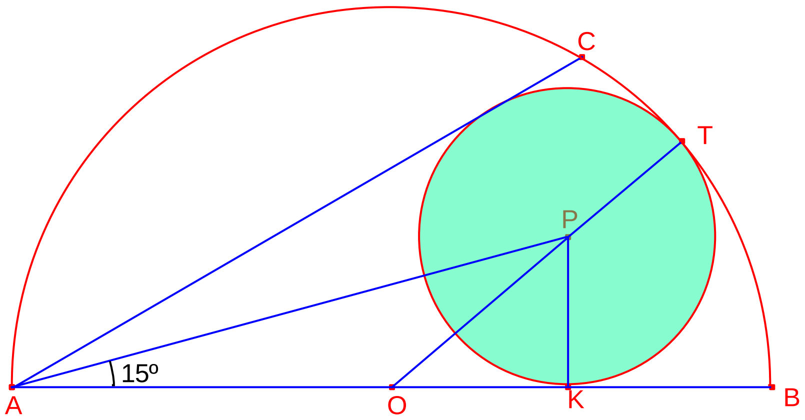


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = 15$
Aplicant la propietat de la mitjana en un triangle rectangle:
$\overline{AK} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} = \dfrac{15}{2}$
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AK} = 5$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PGA}$ són semblants i de raó $3 : 1$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AP} = \frac{1}{3} \cdot 12 =$4, $\overline{PG} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$
L'àrea del rectangle ombrejat $AQGP$ és:
$S_{AQGP} = \overline{AP} \cdot \overline{PG} = 4 \cdot 3 = 12$

4824.- La figura està formada per una semicircumferència de diàmetre 10 que conté un cercle tangent.
Calculeu l'àrea del cercle.

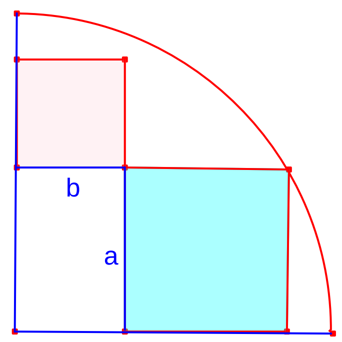


Solució:



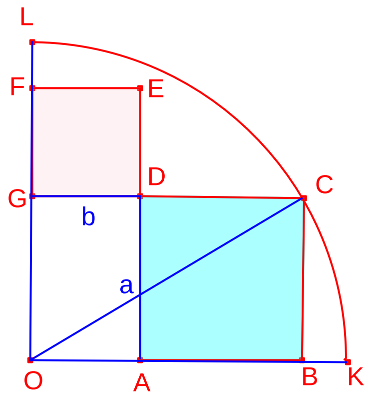
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 5$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PK} = r$
$\angle PAK = 15°$
$\overline{OP} = 5 - r$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:
$\overline{OK} = \sqrt{25 - 10r}$
$\tan 15° = \dfrac{r}{5 + \sqrt{25 - 10r}} = 2 - \sqrt{3}$
Resolent l'equació:
$r = 10\left(-5 + 3\sqrt{3}\right)$
L'àrea del cercle és:
$S_P = \pi r^2 = 100\pi\left(52 - 30\sqrt{3}\right) \approx 12.0875$

4825.- La figura està formada per un quadrant que conté dos quadrats de costats a, b.
Si la proporció de la suma de les àrees del quadrats i l'àrea del quadrant és mínima, calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OK} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = b$
La proporció d'àrees és:

$$P(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{\pi}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:
$2a^2 + b^2 + 2ab = 1$

Siga $\frac{a}{b} = k$
$2k^2b^2 + b^2 + 2kb^2 = 1$

$$b^2 = \frac{1}{2k^2 + 2k + 1}$$

La proporció d'àrees és:

$$P(a, b) = \frac{k^2b^2 + b^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 + k^2}{2k^2 + 2k + 1}$$

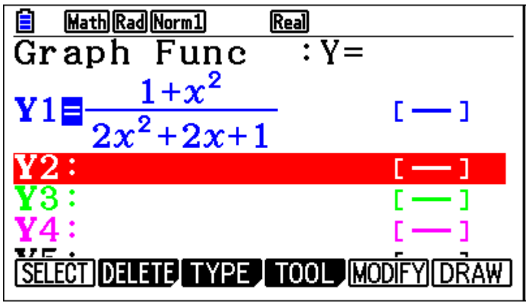
Considerem la funció:

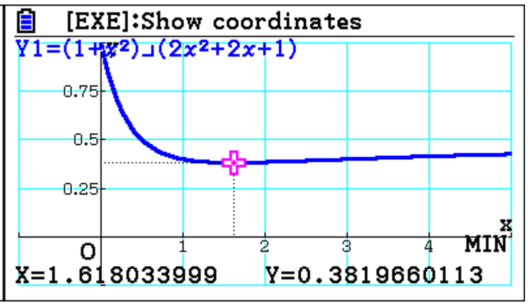
$$f(k) = \frac{1 + k^2}{2k^2 + 2k + 1}$$

$$f'(k) = \frac{2(k^2 - k - 1)}{(2k^2 + 2k + 1)^2}$$

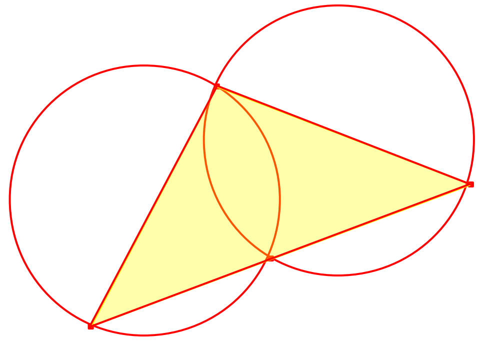
$f'(k) = 0$ quan $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
$f''(\Phi) > 0$
El mínim s'assoleix quan:

$$k = \frac{a}{b} = \Phi$$

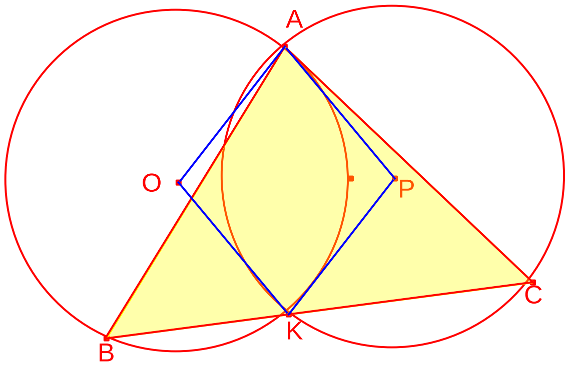




4826.- La figura està formada per dues circumferències iguals i secants.
Proveu que el triangle ombrejat és isòsceles.



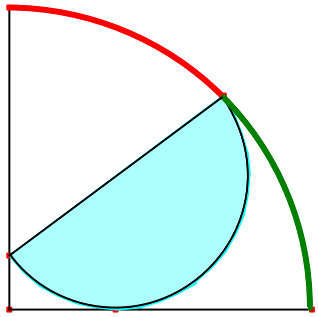
Solució:



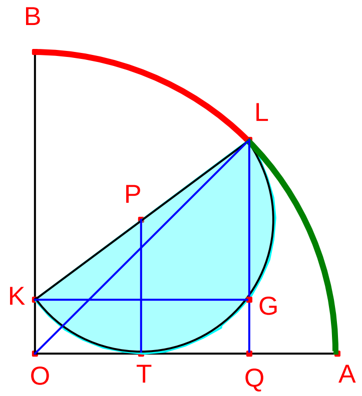
angleAOK=angleAPK

angleABC=angleBCA=(1/2)angle OAK

4827.- En la figura els arcs roig i verd són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la semicircumferència ombrejada i l'àrea del quadrant.



Solució:



OA=1

PT=PL=PK=r

OQ=QL=sqrt(2)/2

x=OK

PT=(OK+QL)/2

x+sqrt(2)/2=2r

LG=sqrt(2)/2-x

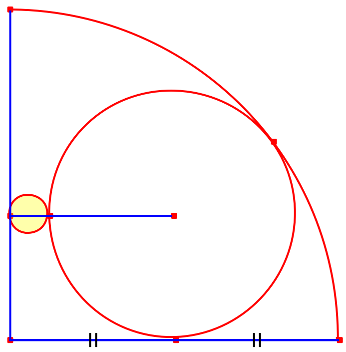
Teorema Pitàgores KGL

$4r^2=1+x^2-x\cdot sqrt(2)$

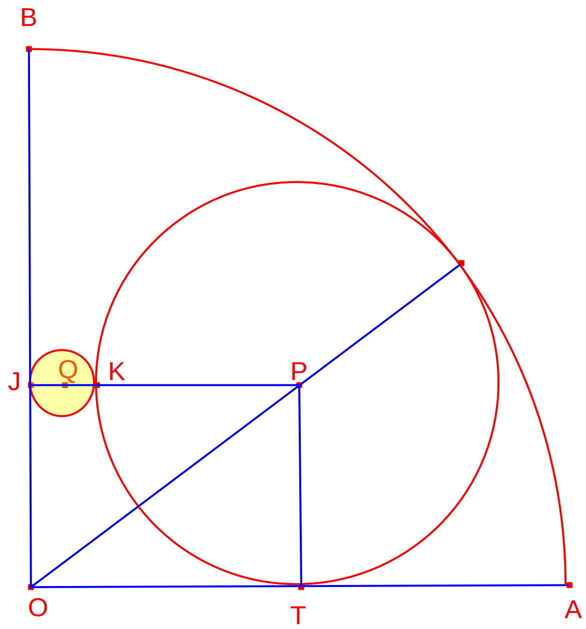
r=(5/16)sqrt(2)

Fràction: $2r^2/1^2=25/64$

4828.- La figura està formada per un quadrant que conté dues circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del quadrant.



Solució:



OT=TA=1
PK=PT=r
JK=2s

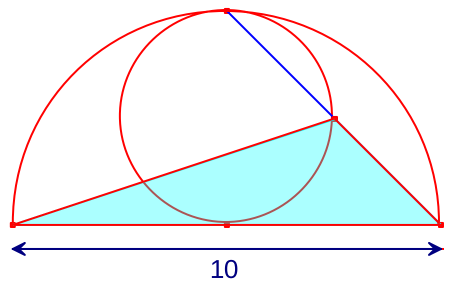
OP=2-r

Teorema Pitàgores OTP

$4-4r+r^2=r^2+1$
r=3/4
JK=1-3/4=1/4
s=1/8

Proporció: $4s^2/2^2=1/64$

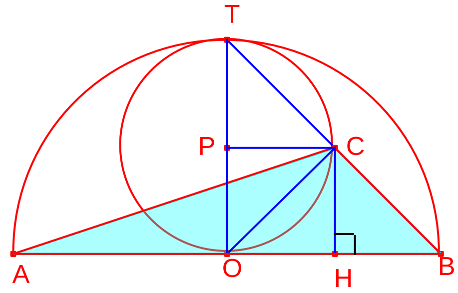
4829.- La figura està formada per una semicircumferència de diàmetre 10 que conté una circumferència tangent i tangent al diàmetre en el centre. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O diàmetre $\overline{AB} = 10$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PO} = 5$



El triangle $\overset{\Delta}{TCO}$ és rectangle i isòsceles.

aleshores, $\overline{PC}, \overline{OT}$ són perpendiculars.

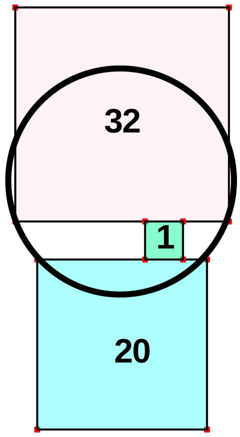
Siga $\overline{CH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{CH} = \overline{PO} = \frac{1}{2} \cdot 5$

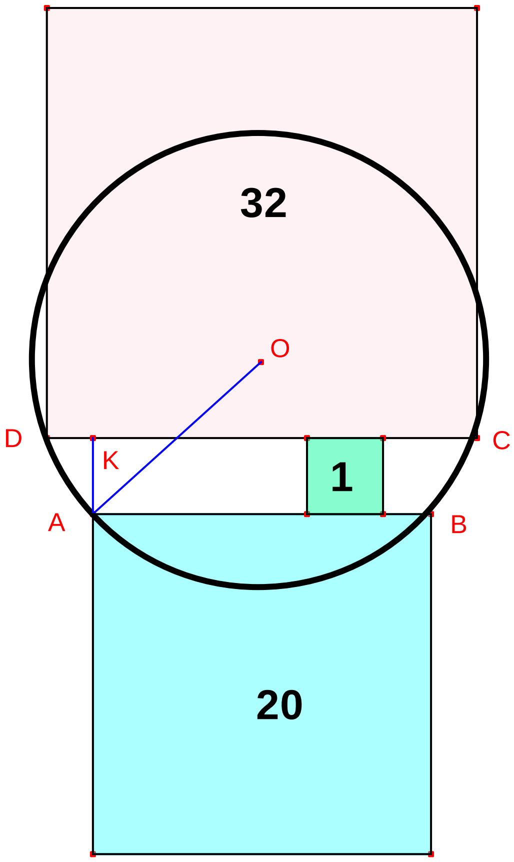
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} 10 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

4830.- La figura està formada per tres quadrats d'àrees 32, 1, 20.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:



OA=R

ABCD trapezi isòsceles

CD=4·sqrt(2)
AB=2·sqrt(5)
DK=2·sqrt(2)-sqrt(5)

AD=sqrt(14-4·sqrt(10))
AC=sqrt(14+4·sqrt(10))

[ACD]=(1/2)·2·sqrt(5)·1=sqrt(5)

[ACD]=CD·AD·AC)/(4R)=3··sqrt(5)/R

R=3

[Cercle]=9·PI