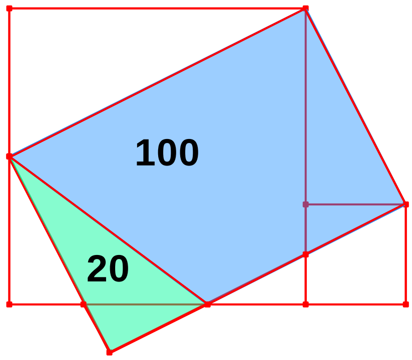
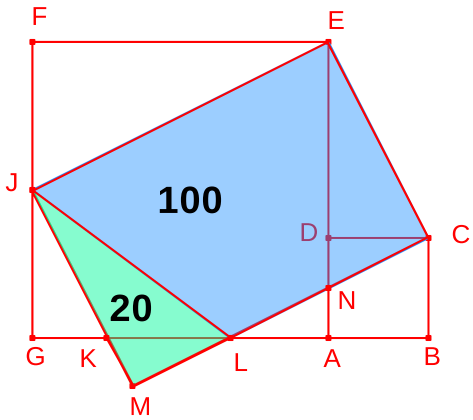
4841.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle inclinat que comparteix tres vèrtexs. Calculeu l'àrea total de la figura



Solució:



AB=a, DE=b

CE=sqrt(a²+b²)

ML=x, LC=2x, JE=3x

EFJ, EDC semblants

FJ=a(a+b)/b

EFJ, LBC semblants

a/2x =(a(a+b)/b)/3x

b=2a

N punt mig AD

x=ML=CN=a·sqrt(5)

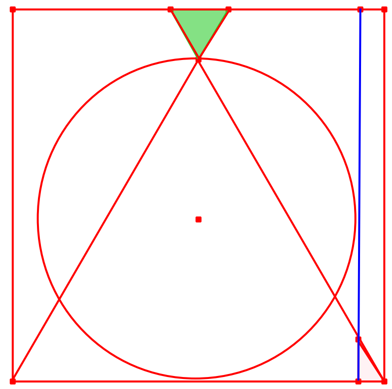
[CEJM]=120=3x+sqrt(a²+b²)

a=4, b=8

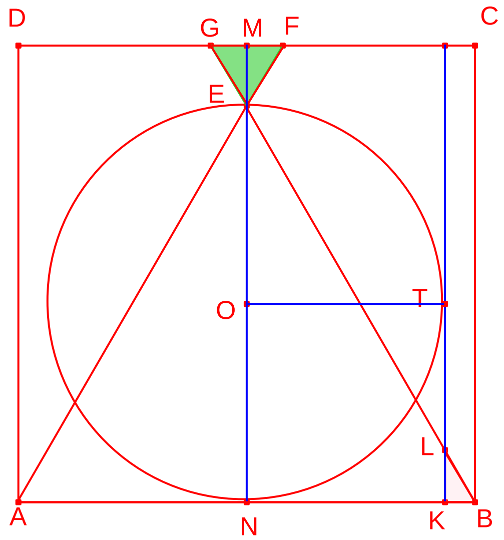
[KML]=(x/b)²·(1/2)ab=5

[Total]=a²+(a+b)²+(1/2)ab+5=181

4842.- La figura està formada per un quadrat un triangle equilàter i una circumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle verd i l'àrea del triangle rosa.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$ de costat $\overline{AB} = c$

$$\overline{NE} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{oT} = \overline{ON} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$

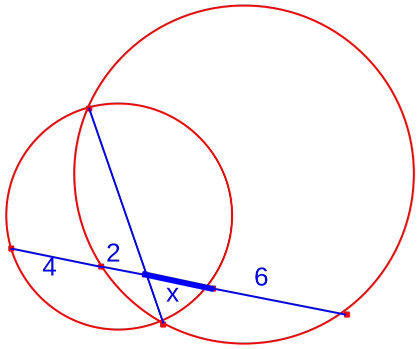
$$2x = c - \frac{\sqrt{3}}{2}c \cdot \overline{OT} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c$$

$$\overline{ME} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c, \overline{LM} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

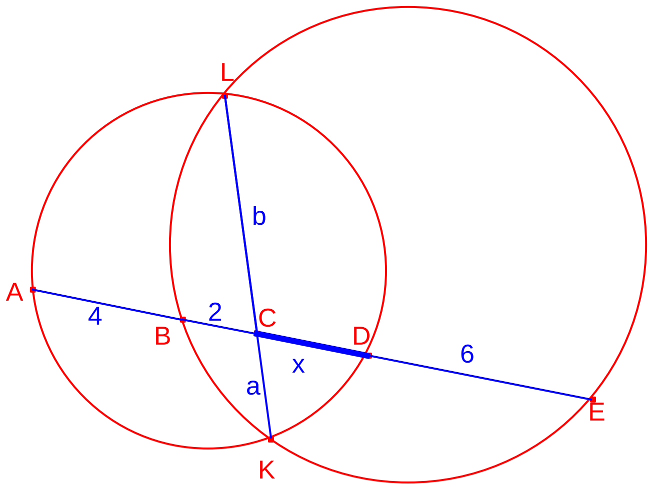
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{EFG}}{S_{KBL}} = 2\left(\frac{\overline{KL}}{\overline{ME}}\right)^2 = 2\left(\frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c}{x\sqrt{3}}\right)^2 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

4843.- La figura està formada per dues circumferències secants.
Determineu la mesura del segment x

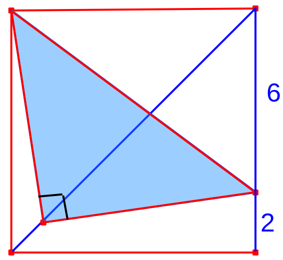


Solució:

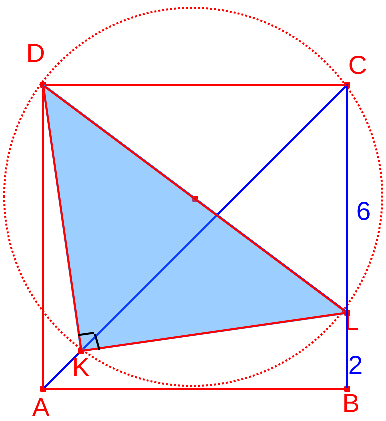


Siguen $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 2, \overline{CD} = x, \overline{DE} = 6$
Siguen $\overline{KC} = a, \overline{CL} = b$
Aplicant la potència del punt C respecte de la circumferència de l'esquerra:
$ab = 6x$
Aplicant la potència del punt C respecte de la circumferència de la dreta:
$ab = 2(x + 6)$
$6x = 2(x + 6)$
Resolent l'equació:
$x = 3$

4844.- La figura està formada per un quadrat i un triangle rectangle que té el vèrtex recte sobre la diagonal del quadrat.
Calculeu l’àrea del triangle rectangle.



Solució:



AB=8

DL=10

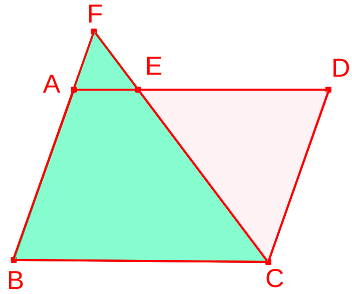
CDKL inscriptible

angleKLD=angleKCD=45º

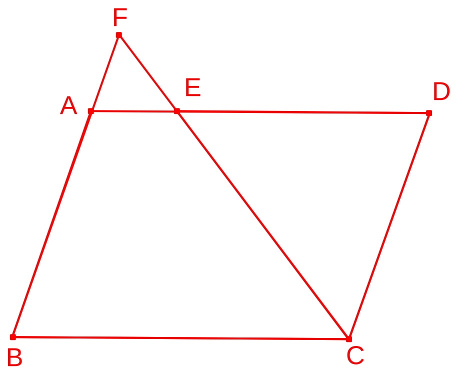
KL=DL=5·sqrt(2)

[KLD]=50

4845.- En la figura $ABCD$ és un paral·lelogram, L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FBC}$ és 16 i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECD}$ és 9. Calculeu l'àrea del paral·lelogram $ABCD$.



Solució:



BCF, DEC semblants

$9/16=(DE/BC)^2$

DE=3k, BC=4k

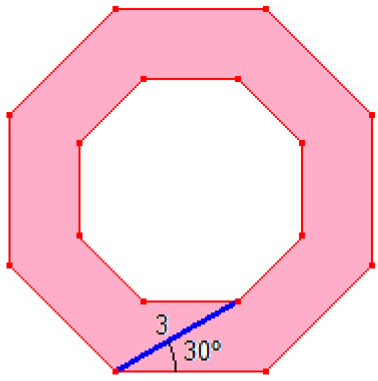
AE=k

BCF, AEF semblants

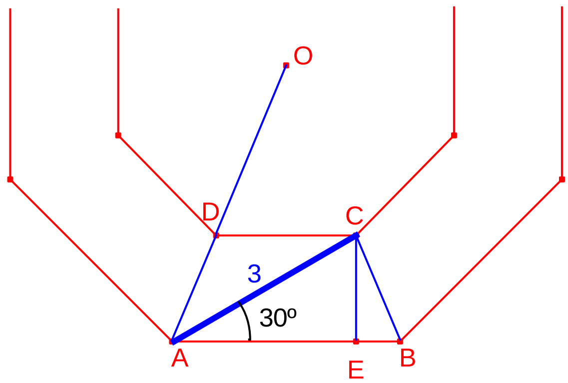
$[AEF]=(1/4)^2\cdot[BCF]=1$

$[ABCD]=9+16-1=24$

4846.- La figura està formada per dos octògons regulars concèntrics.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

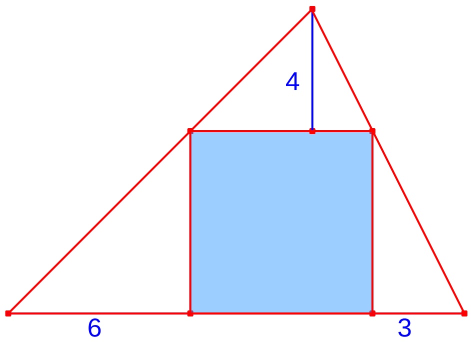


Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'octògon regular gran.
Siga $\overline{CD} = a$ costat de l'octògon regular menut.
Siga $\overline{AC} = 3, \angle CAB = 30°$



$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}135°$$
$$\tan\frac{135°}{2} = 1 + \sqrt{2}$$
$$\overline{CE} = \frac{3}{2}, \overline{AE} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{\frac{3}{2}}{\overline{BE}} = \tan\frac{135°}{2} = 1 + \sqrt{2}$$
$$\overline{BE} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$
$$\overline{BE} = c - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$
$$c = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right)$$
$$a = c - 2 \cdot \overline{BE} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1\right)$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 8 \cdot S_{ABCD} = 8 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot \overline{CE} = 18\sqrt{3}$$

4847.- El triangle de la figura té inscrit un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{NMC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

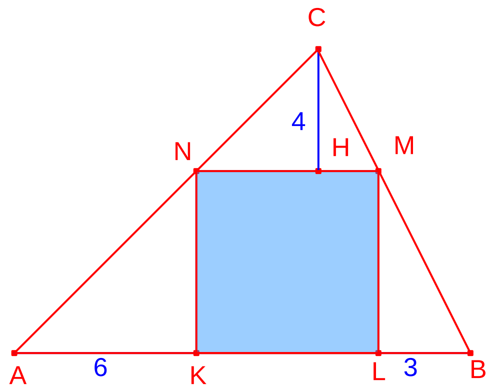
$$\frac{\overline{CH}}{\overline{CH} + \overline{KN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{4}{4+c} = \frac{c}{9+c}$$

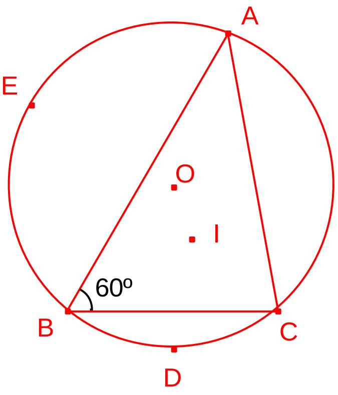
$$c^2 = 36$$

L'àrea del quadrat és:

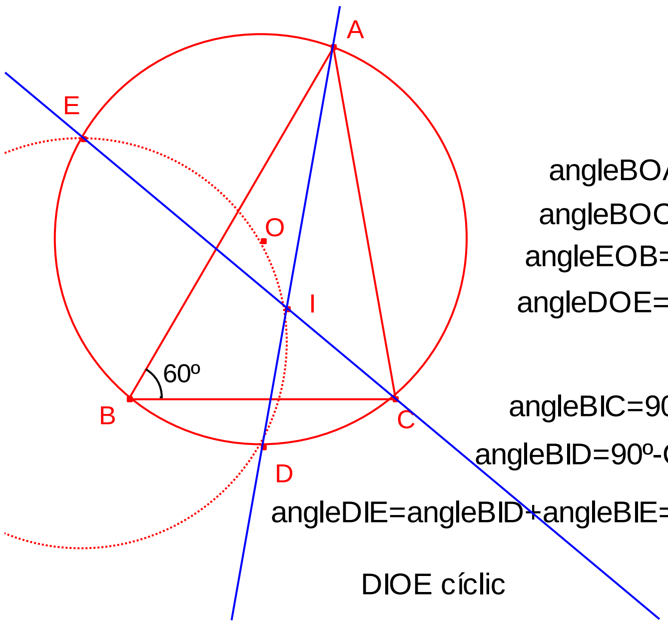
$$S_{KLMN} = c^2 = 36$$



4848.- En la figura és triangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 60°$ està inscrit en la circumferència de centre O.
D i E són els punts migs dels arcs $\widehat{BC}, \widehat{AB}$ respectivament.
I és el incentre del triangle.
Proveu que els punts E, O, I, D són cíclics. (pertanyen a una circumferència)



Solució:



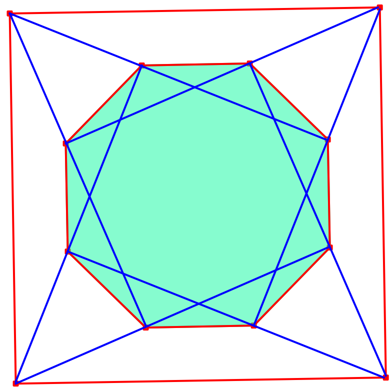
angleBOA=2C
angleBOC=2A
angleEOB=C, angleBOD=A
angleDOE=A+C=180º-B=120º

angleBIC=90º+A/2, angleBIA=90º+C/2
angleBID=90º-C/2, angleBIE=90º-A/2
angleDIE=angleBID+angleBIE=90º-C/2+90º-A/2=120º

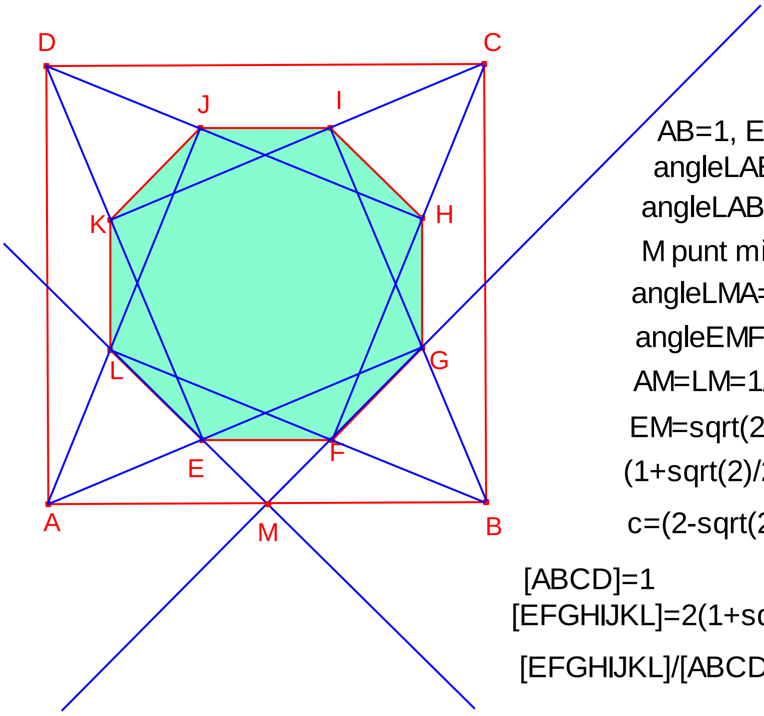
DIOE cíclic

Nota:
Les dues circumferències tenen el mateix radi.
la circumferència que passa pels punts E, O, I E té el centre en el punt mig de l'arc $\widehat{DE}$

4849.- La figura està formada per un quadrat que conté un octògon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'octògon regular i l'àrea del quadrat.



Solució:

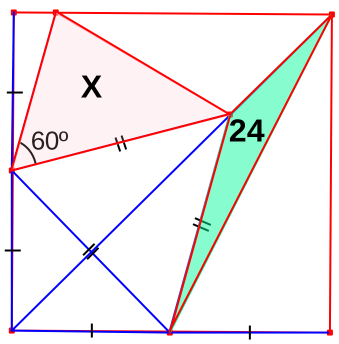


AB=1, EF=c
angleLAE=45º
angleLAB=angleALE=(3/2)45º
M punt mig AB
angleLMA=45º
angleEMF=90º
AM=LM=1/2
EM=sqrt(2)/2
(1+sqrt(2)/2)=1/2
c=(2-sqrt(2))/2

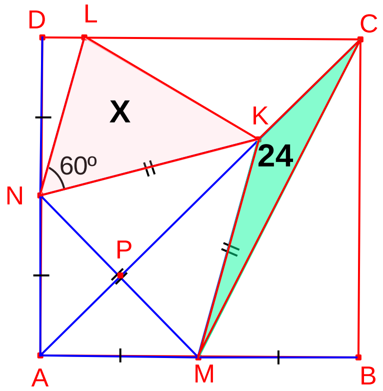
[ABCD]=1
[EFGHIJKL]=2(1+sqrt(2))c²=-1+sqrt(2)

[EFGHIJKL]/[ABCD]=-1+sqrt(2)

4850.- La figura està formada per un quadrat que conté dos triangles ombrejats.
Si el triangle verd té àrea 24, calculeu l'àrea del triangle X



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$



$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{AN} = \overline{DN} = a$

$\overline{MN} = \overline{MK} = \overline{NK} = a\sqrt{2}$

$\overline{AC} = 2a\sqrt{2}$

$$\overline{AP} = \overline{MP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{PK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\overline{CK} = \left(2\sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)a = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}a$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MKC}$:

$$24 = \frac{1}{2}\overline{CK} \cdot \overline{PM}$$

$$24 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{8}a^2 = 24$$

$$\angle DNL = 15°, \cos 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNL}$:

$$\frac{a}{\overline{NL}} = \cos 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{NL} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}a$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{NKL}$ és:

$$S_{NKL} = \frac{1}{2}\overline{NL} \cdot \overline{NK} \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}a^2 = 48$$