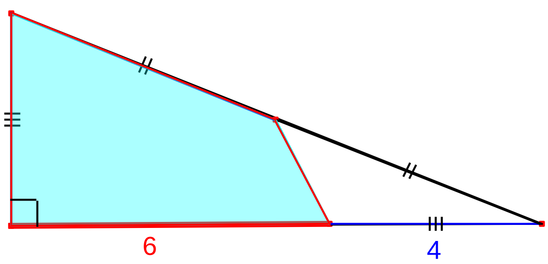
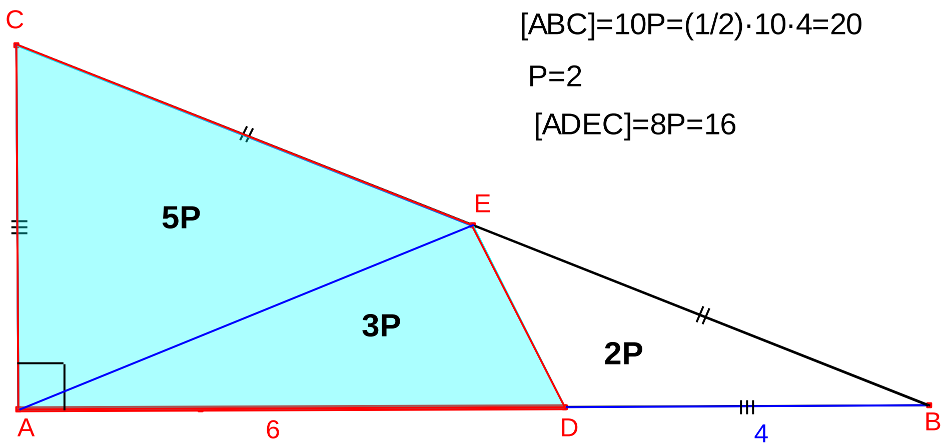
4861.- La figura està formada per un triangle equilàter i un catet dividit en dos segments de longituds 6, 4.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



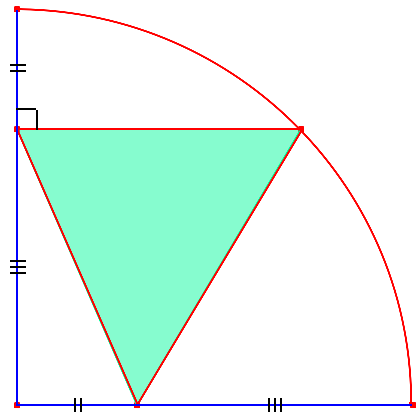
AC=BD=4

[ABC]=10P=(1/2)·10·4=20

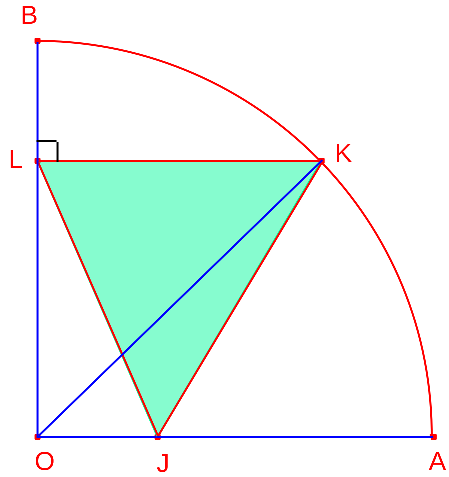
P=2

[ADEC]=8P=16

4862.- La figura està formada per un quadrant i un triangle.
Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del triangle i l'àrea del quadrat.

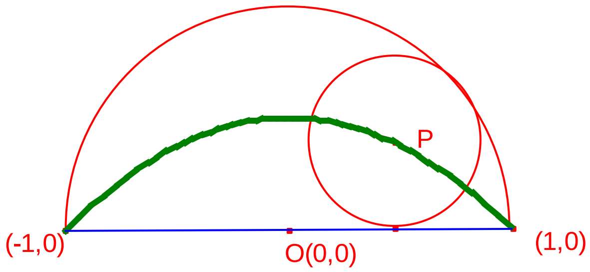


Solució:
Siga el quadrat de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OK} = 1$
Siga $\overline{OJ} = \overline{BL} = a$
$\overline{OL} = 1 - a$

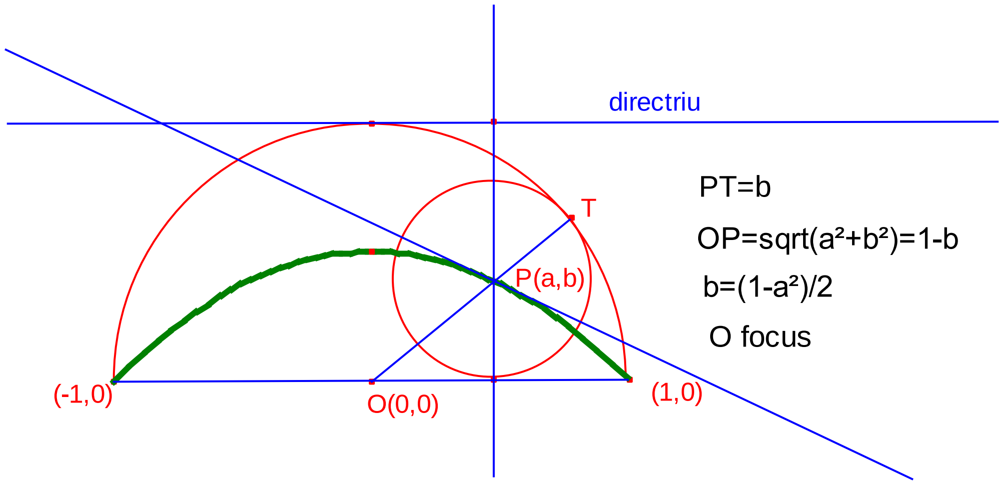


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLK}$:
$\overline{LK} = \sqrt{2a - a^2}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JKL}$ és:
$S_{JKL} = \frac{1}{2}(1-a)\sqrt{2a - a^2}$
La proporció d'àrees és:
$$p(a) = \frac{\frac{1}{2}(1-a)\sqrt{2a-a^2}}{\frac{\pi}{4}}, a \in [0,1]$$
Considerem la funció:
$f(a) = (1-a)^2(2a - a^2)$
$f'(a) = -4a^3 + 12a^2 - 10a - 2$
$f'(a) = 0$
$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$
$$f''\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$
El màxim de la proporció s'assoleix quan $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$
La proporció màxima és:
$$p\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$$

4863.- Donada la semicircumferència de centre $O(0,0)$ i diàmetre els punts $(-1,0),(1,0)$
Proveu que el lloc geomètric dels centres de les circumferències tangents a la semicircumferència i al diàmetre pertanyen a una paràbola.

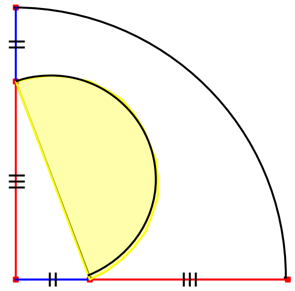


Solució:

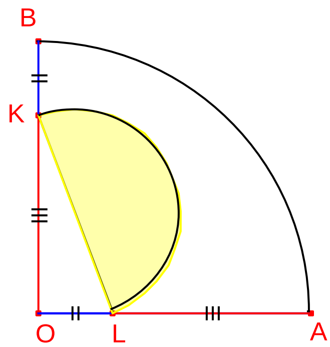


La recta $y=1$ és la directriu.
El punt $O(0,0)$ és el focus.

4864.- La figura està formada per un quadrant que conté un semicercle.
Calculeu la proporció màxima i mínima entre l'àrea del semicercle i l'àrea del quadrant.



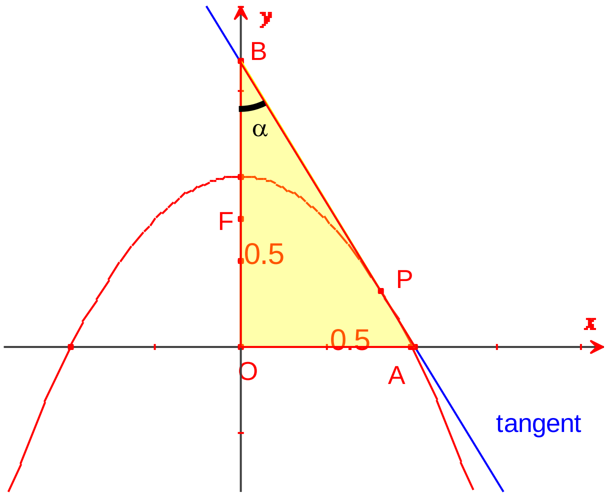
Solució:
Siga el quadrat de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$
Siga $\overline{Ol} = \overline{Bk} = a$
$\overline{Ok} = 1 - a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLK}$:
$\overline{LK} = \sqrt{2a^2 - 2a + 1}$
L'àrea del semicercle és:
$$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2a^2 - 2a + 1}}{2}\right)^2$$
La proporció d'àrees és:
$$p(a) = \frac{\frac{\pi}{8}\cdot(2a^2 - 2a + 1)}{\frac{\pi}{4}}, a \in [0,1]$$
$$p(a) = \frac{a^2 - a + 1}{2}$$
La funció és una paràbola còncava el mínim s'assoleix en el vèrtex:
$$a = \frac{1}{2}$$
La proporció mínima és:
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

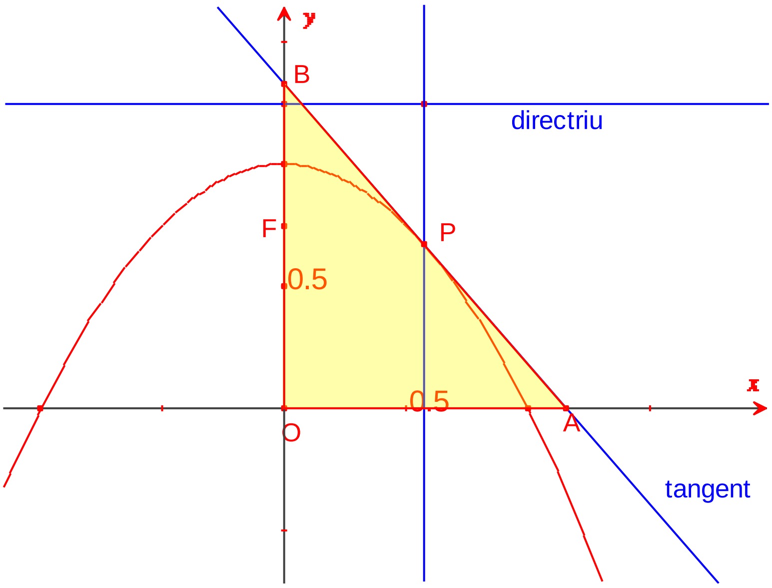
El màxim s'assoleix en els extrems del domini de la funció proporció
$a = 0, 1$
La proporció màxima és:
$$P(0) = p(1) = \frac{1}{2}$$

4865.- Donada la paràbola $y = 1 - x^2$, determineu $\sin\alpha$ tal que el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ té àrea mínima. $\overline{AB}$ és tangent a la paràbola.



Solució:
Siga la paràbola $f(x) = 1 - x^2$
Siga $P(a, 1 - a^2)$ punt de la paràbola
$f'(x) = -2x$
La recta tangent a la paràbola en $P(a, 1 - a^2)$ té equació:
$y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$
Els punts de tall de la recta tangent i els eixos coordenats són:

$$A\left(\frac{a^2+1}{2a}, 0\right), \qquad B(0, 1 + a^2)$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S(a) = \frac{1}{2}\frac{a^2+1}{2a}\cdot(1 + a^2)$$

$$S(a) = \frac{1}{4}\frac{(a^2+1)^2}{a}, a > 0$$

$$S'(a) = \frac{(1 + a^2)(3a^2 - 1)}{a^2}$$

$$S'(a) = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S"\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

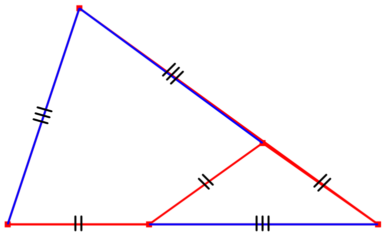
L'àrea mínima s'assoleix quan $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{OB} = \frac{4}{3}, \overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

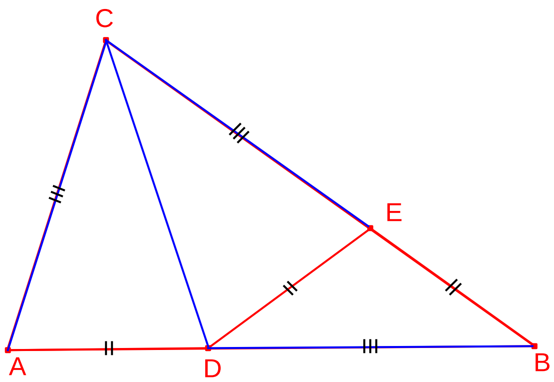
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

4866.- En la figura calculeu la proporció entre les longituds dels segments blau i roig.



Solució:



angleDBE=angleEDB=x

angleDEC=2x

angleEDA=180º-x

triangles ADC, ECD iguals

angleCAD=angleDEC=2x

triangle ABC isòsceles

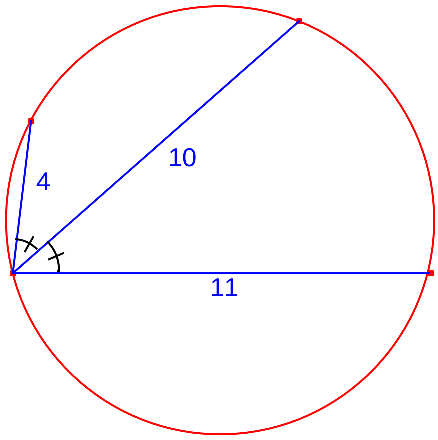
angleACB=angleCAB=2x

5x=180º

x=36º

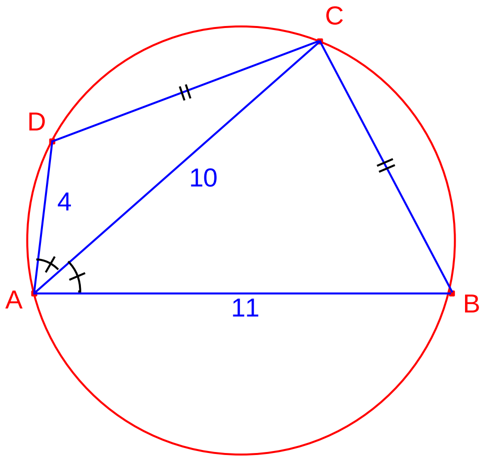
BD / DE = Φ

4867.- La figura està formada per un circumferència i tres cordes de longituds 11, 10 i 4 que formen angles iguals.
Calculeu el radi de la circumferència.



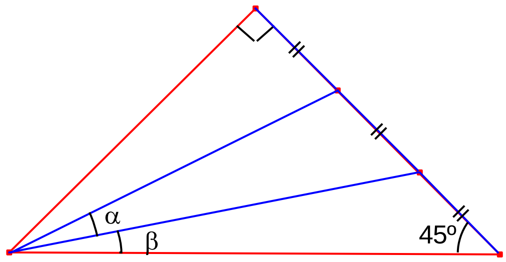
Solució:
Siguen $\overline{AB} = 11, \overline{AC} = 10, \overline{AD} = 4, \angle DAC = \angle CAB = \alpha$
$\overline{CD} = \overline{BC} = a$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ACD}$:
$a^2 = 100 + 121 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos\alpha$
$a^2 = 16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$
Igualant les expressions:
$\cos\alpha = \frac{3}{4}$
$a^2 = 16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4}$
$a = 2\sqrt{14}$
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
Siga R el radi de la circumferència



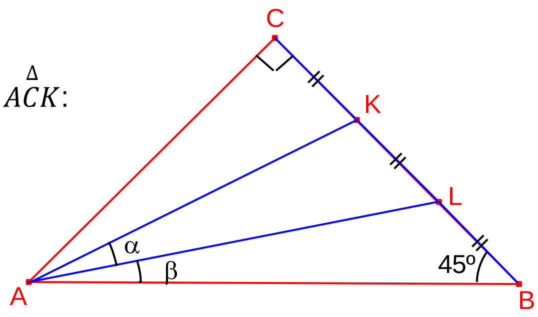
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$
$\frac{2\sqrt{14}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = 2R$
$R = 4\sqrt{2}$

4868.- La figura està formada per un triangle rectangle isòsceles.
Un catet s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu:
$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$



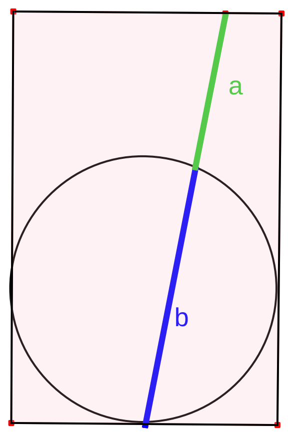
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC}=\overline{BC}=3$
$\overline{CK}=\overline{KL}=\overline{LB}=1$
$\overline{AB}=3\sqrt{2}$

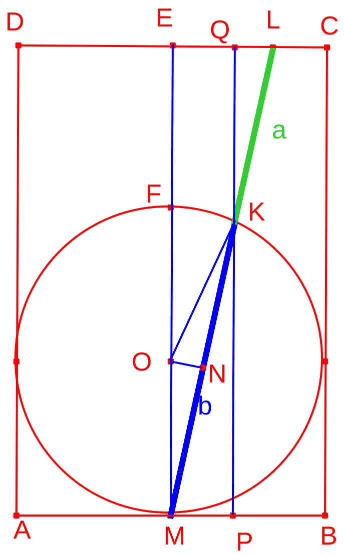


Siga $\overline{AL}=x, \overline{AK}=y$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACK}$:
$y=\sqrt{10}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABL}$:
$$x^2=18+1-2\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$x=\sqrt{13}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABL}$:
$$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{26}}, \tan\beta=\frac{1}{5}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ALK}$:
$$1=13+10-2\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=\frac{11}{\sqrt{130}}, \tan\alpha=\frac{3}{11}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1+\frac{3}{11}}{1-\frac{3}{11}}\cdot\frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{7}{6}$$

4869.- La figura està formada per un rectangle que conté una circumferència tangent a tres costats i un segment que connecta la part superior amb el punt de tangència inferior.
Calculeu l'àrea del rectangle en funció de les longituds a, b.



Solució:



OM=r, EF=c

AB=2r, AD=2r+c

[ABCD]=2r(2r+c)

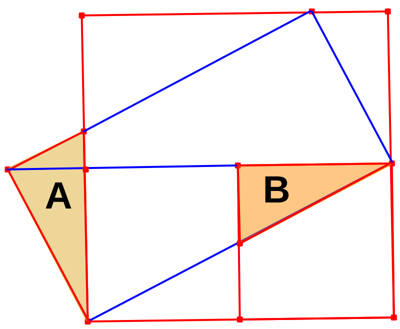
triangles rectangles MNO, KPM, KQL semblants

$PK=b^2/(2r)$, $QK=ab/(2r)$

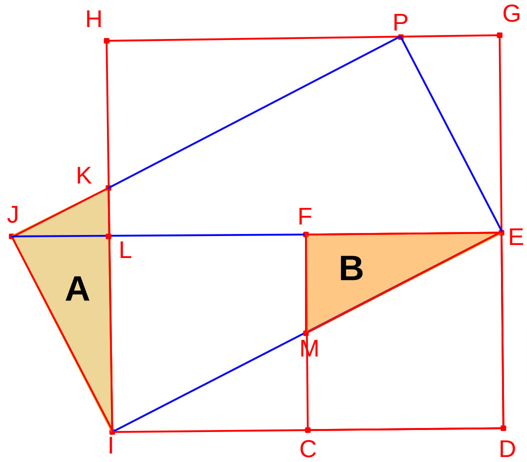
$2r+c=PK+QK=(b^2+ab)/2r$

$[ABCD]=b^2+ab=2r(2r+c)$

4870.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle calculeu la proporció entre les àrees dels triangles $A : B$



Solució:



Els triangles EGP, ILJ són iguals

EG=IL=CD=a

Els triangles IDE, EGP són semblants

PG=(1/2)a

PE=a·sqrt(5)/2

Els triangles IJK, EFM són semblants

$A/B = (IJ/FE)^2 = 5/4$