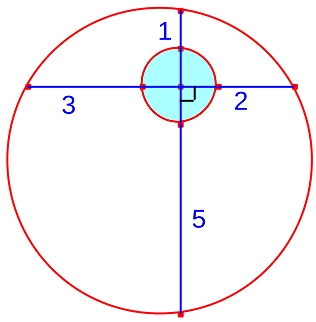
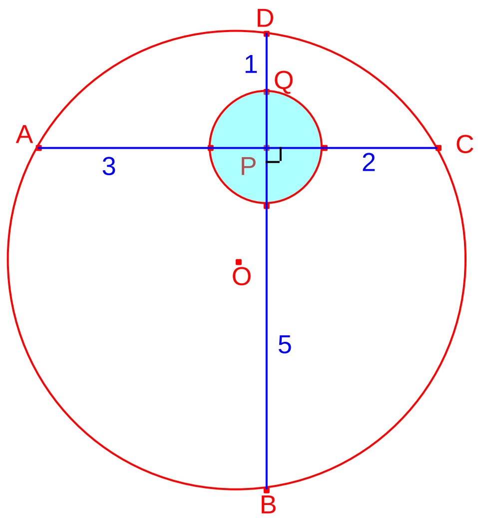
4871.- En la figura calculeu el radi de les dues circumferències.



Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = r$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència de centre O:
$(1 + r)(5 + r) = (3 + r)(2 + r)$
Resolent l'equació:
$r = 1$



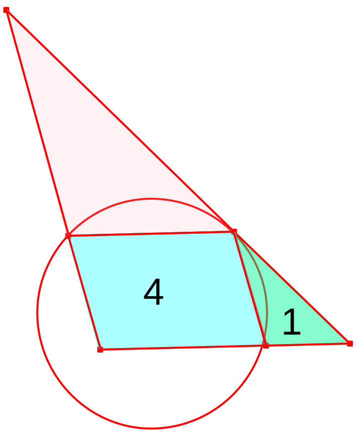
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CPD}$:
$\overline{AD} = 2\sqrt{5}, \overline{CD} = \sqrt{13}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{PD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD}}{4R}$$

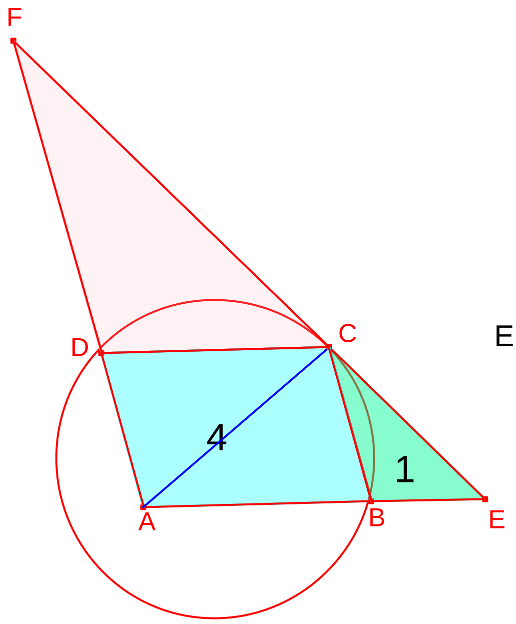
$$1 = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}{4R}$$

$$R = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

4872.- En la figura, un costat del triangle rosa és tangent a la circumferència.
El punt de tangència és el vèrtex del paral·lelogram blau d'àrea 4.
Calculeu l'àrea del triangle rosa.



Solució:



AB=CD=a

BE=b

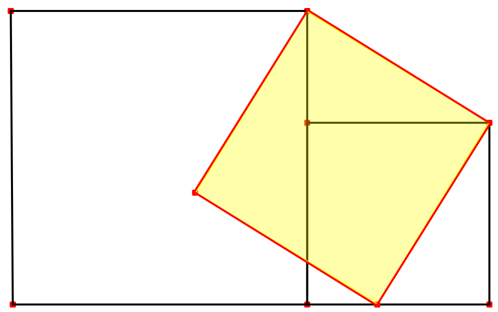
[ABC]/[BEC]=2=a/b

Els triangles BEC, DCF semblants

[DCE]/[BEC]=$(a/b)^2$=4

[DCE]=4

4873.- La figura està formada per tres quadrats. Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea total dels altres dos quadrats.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$

Siga $\overline{DE} = b$

Siga el quadrat $CEJK$ de costat $\overline{CE} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDC}$:

$c^2 = a^2 + b^2$

L'àrea total dels altres dos quadrats és:

$S_{GBCDEF} = a^2 + (a+b)^2$

La proporció d'àrees és:

$$p(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab + b^2}$$

Siga $x = \frac{b}{a}$

La funció proporció és:

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2 + 2x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

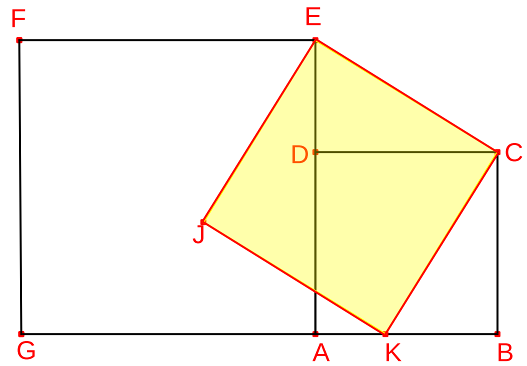
$$f'(x) = 0, x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

$$f"\left(\frac{1}{\Phi}\right) > 0$$

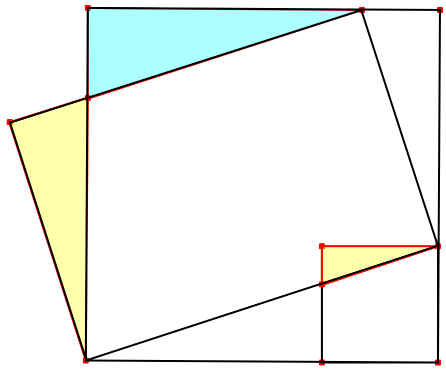
El mínim de la proporció s'assoleix quan $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$

La proporció mínima és:

$$f\left(\frac{1}{\Phi}\right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi^2}$$



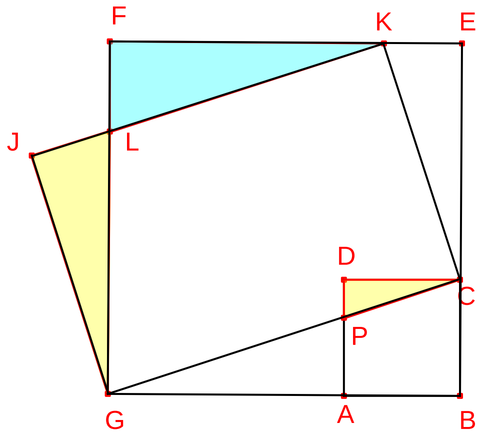
4874.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i el total de l'àrea groga.



Solució;
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga $\overline{CE} = b$
Siga $\overline{KE} = x$

Els triangles rectangles $G\overset{\Delta}{A}P, C\overset{\Delta}{E}K$ són iguals.

Els triangles rectangles $G\overset{\Delta}{B}C, C\overset{\Delta}{E}K$ són semblants.



Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{b}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

$$\overline{DP} = a - x = \frac{a^2}{a+b}$$

$$\overline{FK} = a + b - x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

$$\overline{FK}^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2}{(a+b)^2}$$

$$\overline{GJ}^2 = x^2 + b^2$$

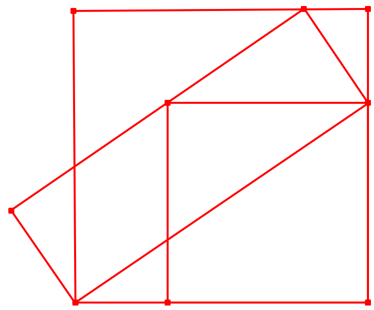
$$\overline{CD}^2 = a^2$$

$$GJ^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + x^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2}{(a+b)^2}$$

Els triangles ombrejats són tots tres semblants.

$$\frac{S_{KFL}}{S_{GJL} + S_{CDP}} = \frac{\overline{FK}^2}{\overline{GJ}^2 + \overline{CD}^2} = 1$$

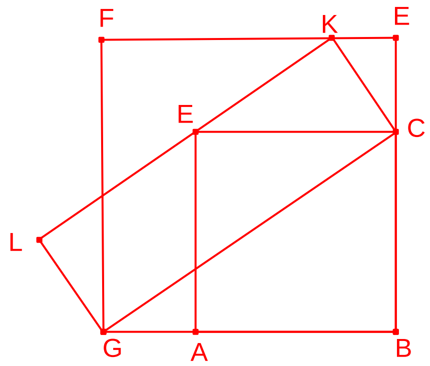
4875.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle.
Proveu que l'àrea del rectangle és igual a l'àrea del quadrat menut.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga $\overline{CE} = b, \overline{CK} = x$

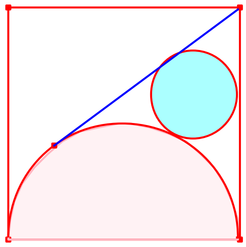
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{GBC}$:
$\overline{GC} = \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EKC}, \overset{\Delta}{GBC}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{a} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}}$$
Aleshores:
$$S_{CKLG} = x\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2} = a^2 = S_{ABCD}$$

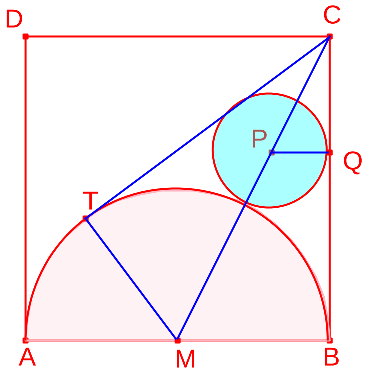


Calculem la proporció
$$\frac{b}{a}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CEK}, \overset{\Delta}{GBC}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b}{x} = \frac{a+b}{\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}}$$
Multiplicant les expressions:
$$\frac{b}{a} = \frac{a(a+b)}{2a^2 + 2ab + b^2}$$
$b^3 + 2ab^2 + a^2b - a^3 = 0,$
Resolent l'equació:
$$\frac{b}{a} = \frac{1}{3}\left(-2 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(29 - 3\sqrt{93}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(29 + 3\sqrt{93}\right)}\right)$$

4876.- La figura està formada per un quadrant, una semicircumferència que té el diàmetre sobre un costat i una circumferència tangent a la semicircumferència, un costat del quadrat i la recta tangent a la circumferència sobre que passa pe un vèrtex.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la circumferència i l'àrea de la semicircumferència.

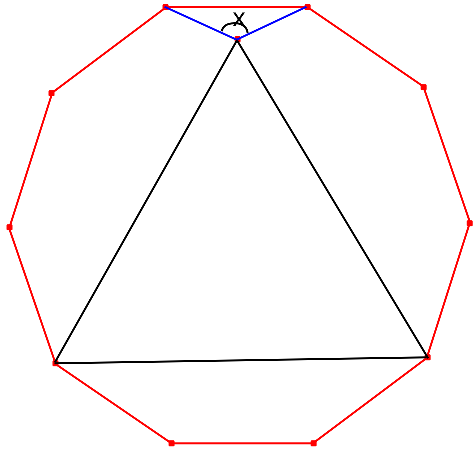


solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre de la semicircumferència.
$\overline{CB} = \overline{CT}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MTC}, \overset{\Delta}{MBC}$ són iguals.
$\overline{CM}$ és bisectriu de l'angle $\angle TCB$
Siga P el centre de la circumferència tangent a la semicircumferència, de radi $\overline{PQ} = r$
P pertany al segment $\overline{CM}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{PQC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{QC} = 2r$
$\overline{MC} = a\sqrt{5}, \overline{PC} = r\sqrt{5}$

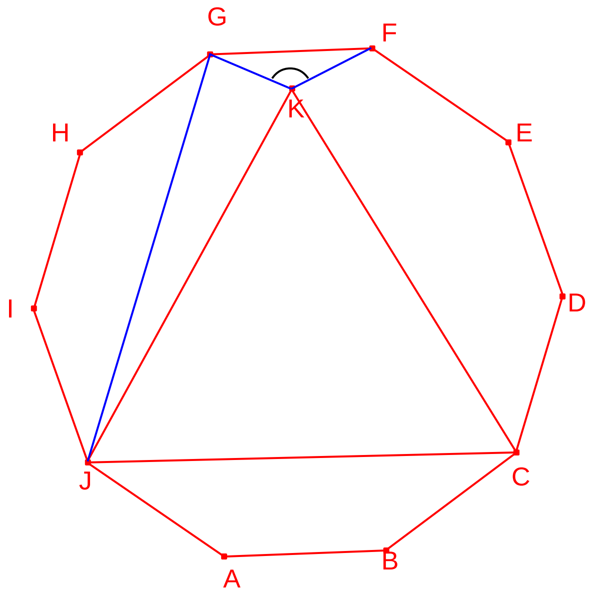


$\overline{MC} = a\sqrt{5} = a + r + r\sqrt{5}$
$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi^2}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{cerc\tilde{n}e}}{S_{semicercle}} = \frac{r^2}{\frac{1}{2}a^2} = 7 - 3\sqrt{5} = \frac{2}{\Phi^4}$$

4877.- La figura està formada per un decàgon regular i un triangle equilàter. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleIJA=144º

JG=JC=JK

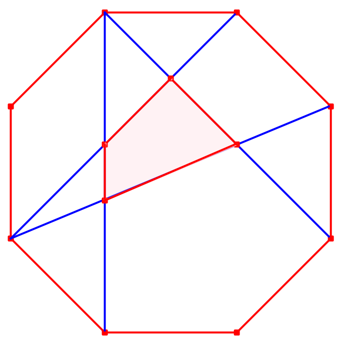
angleIJG=angleAJC=36º

angleGJK=144º-(36º+60º+36º)=12º

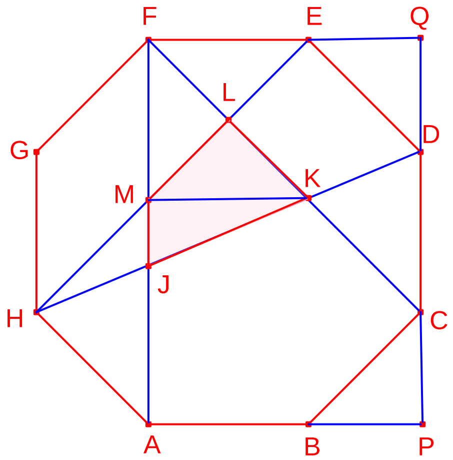
angleJKG=angleFKC=(180º-12º)/2=84º

angleGKF=360º-(2·84º+60º)=132º

4878.- La figura està formada per un octògon regular i quatre diagonals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'octògon regular



Solució:



AB=1

AJ=FM=1

ML=LK=PC=QC=sqrt(2)/2

PQ=1+sqrt(2)

MK=1

angleJMK=90º

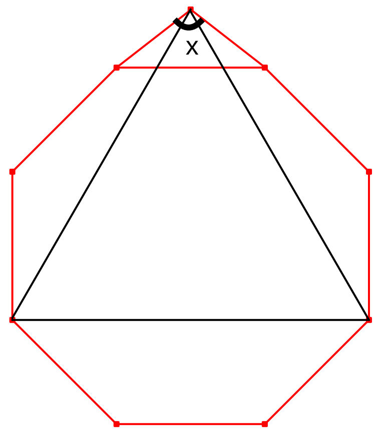
MJ=sqrt(2)-1

[ABCDEFGH]=(1+sqrt(2))²-1²=2(1+sqrt(2))

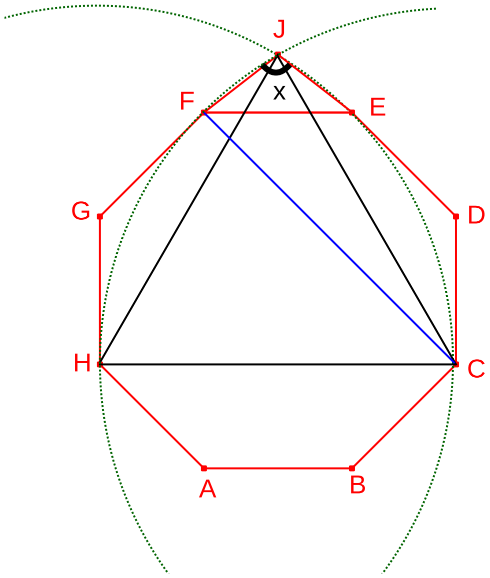
[JKLM]=[MLK]+[JMK]=(1/2)·(1/2) + (1/2)(sqrt(2)-1)=2·sqrt(2)-1)/4

[JKLM]/[ABCDEFGH]=(5-3·sqrt(2))/8

4879.- La figura està formada per un octògon regular i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



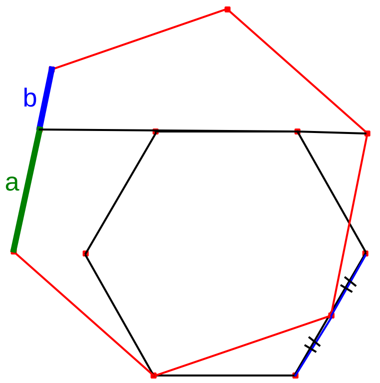
La circumferència de centre C que passa per H, passa per F, L

AngleHCF=45º

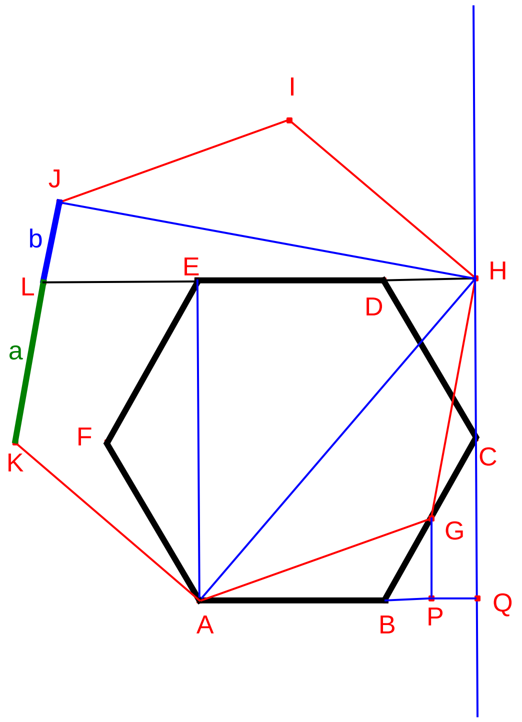
angle FJH=45º/2

x=angle FJE=60º+2·45º/2=105º

4880.- La figura està formada per dos hexàgons regulars que tenen un vèrtex comú.
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:



AB=2
BG=1
AE=2·sqrt(3)
AG=sqrt(7)
HJ=AH=sqrt(21)
BP=1/2, GP=sqrt(3)/2
angleGAB=x
angleJHL=30º-x
angleEAH=60º-x
tan x=sqrt(3)/5
tan(30º-x)=sqrt(3)/9
tan(60º-x)=sqrt(3)/2
EH=3
Els punts E, D, H estan alineats
b=sqrt(21)·tan(30º-x)=sqrt(7)/3
a=sqrt(7)-b=2·sqrt(7)/3
a/b=2