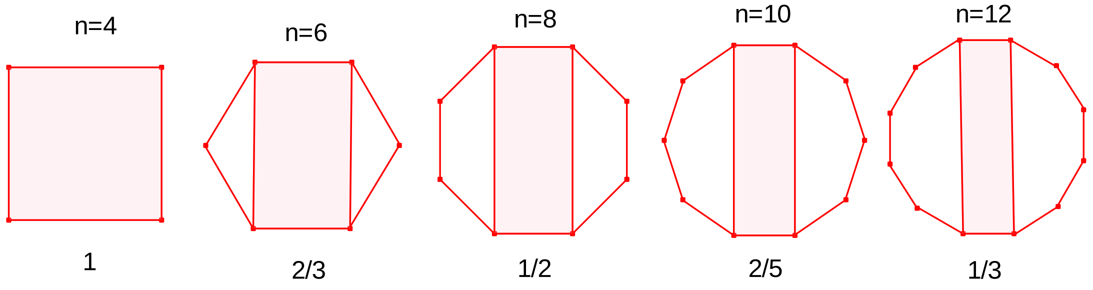
4881.- La figura està formada per rectangles en polígons regulars amb un nombre parells de costats.
Quina fracció està ombrejada?
Hi ha algun patró? És sempre un nombre racional?



Solució:
Siga el polígon regular de n costat $\overline{AB}$ i centre O.
Siga $\overline{OA} = r$, radi de la circumferència circumscrita al polígon regular.
Siga el rectangle $ABCD$.

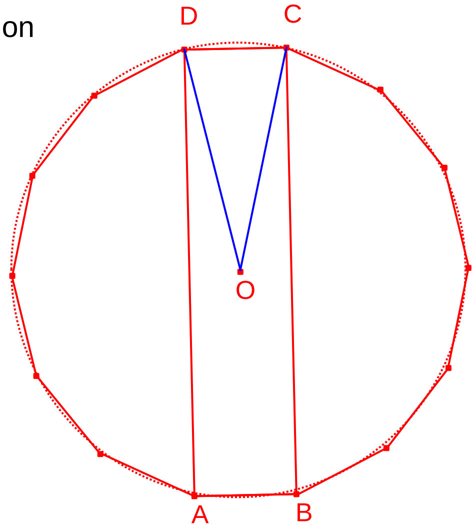
$$S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{n}{306°}$$

L'àrea del polígon regular és:

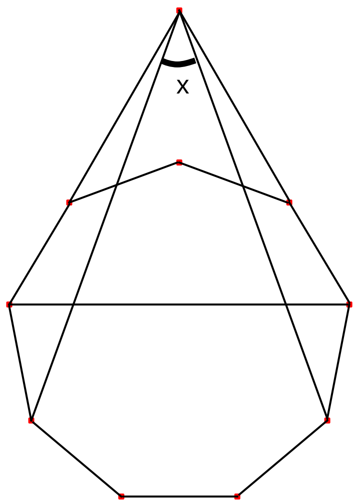
$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{n}{306°}$$

La proporció d'àrees és:

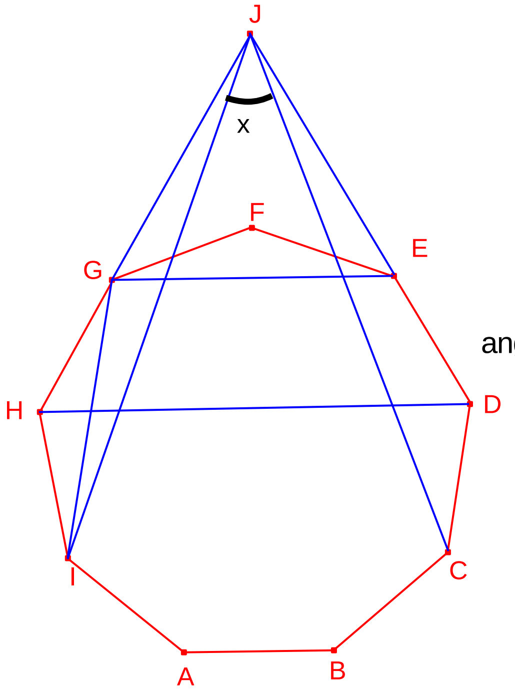
$$\frac{S_{ABCD}}{S_n} = \frac{4}{n}$$



4882.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



IG=GE=GJ

angleEGI=100º

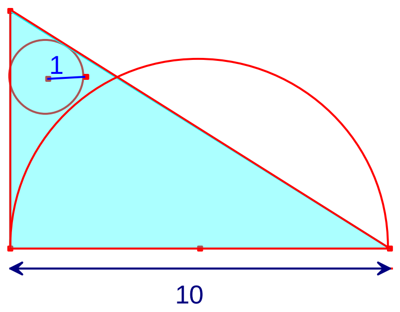
angleJGE=60º

angleJGI=160º

angleGJI=angleGIJ=(180º-160º)/2=10º

x=angleIJC=60º-2·10º=40º

4883.- La figura està formada per una semicircumferència de diàmetre 10, un triangle rectangle que conté una circumferència tangent a dos costats del triangle i a la semicircumferència. Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 10$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{OP} = 6, \overline{OQ} = 4$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$:

$\overline{PQ} = \overline{AT} = 2\sqrt{5}$

Siga DE la recta paral·lela a la hipotenusa $\overline{BC}$ del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DTP}, \overset{\Delta}{CHD}$ són iguals.

Siga $\overline{DT} = \overline{CH} = a$

$\overline{CD} = \overline{DP} = \sqrt{1 + a^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DTP}, \overset{\Delta}{CAB}$ són semblants.

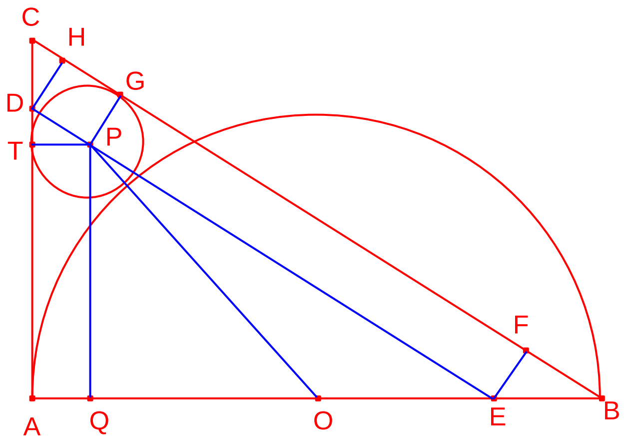
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{1} = \frac{2\sqrt{5} + a + \sqrt{1 + a^2}}{10}$$

Resolent l'equació:

$$a = \frac{5 + 9\sqrt{5}}{40}$$

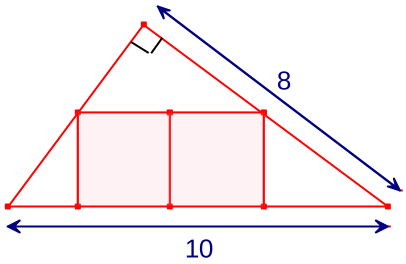
$$\overline{AC} = 10a = \frac{5 + 9\sqrt{5}}{4}$$



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 10 \cdot \frac{5 + 9\sqrt{5}}{4} = \frac{5(5 + 9\sqrt{5})}{4}$$

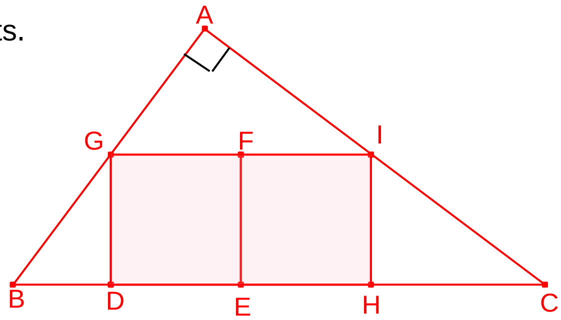
4884.- La figura està formada per un triangle rectangle de catet 8 i hipotenusa 10 que conté dos quadrats. Calculeu l'àrea ombrejada pels dos quadrats.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = 8, \overline{BC} = 10, \overline{AB} = 6$

Siguen els quadrats $DEFG, EHIF$ de costat $\overline{DE} = c$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBG}, \overset{\Delta}{HIC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BD} = \frac{3}{4}c, \overline{CH} = \frac{4}{3}c$$

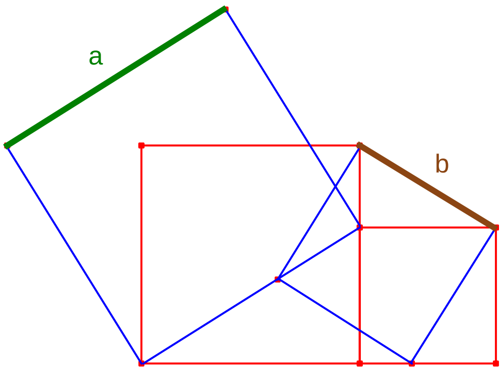
$$\overline{BC} = 10 = \frac{3}{4}c + 2c + \frac{4}{3}c$$

$$c = \frac{120}{49}$$

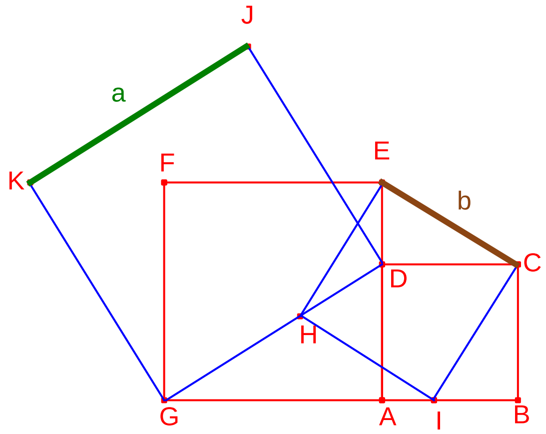
L'àrea ombrejada és:

$$S_{DHIG} = 2c^2 = 2\left(\frac{120}{49}\right)^2 = \frac{28800}{2401} \approx 11.9950$$

4885.- La figura està formada per quatre quadrats.
Calculeu el valor màxim de par proporció: $\frac{a}{b}$



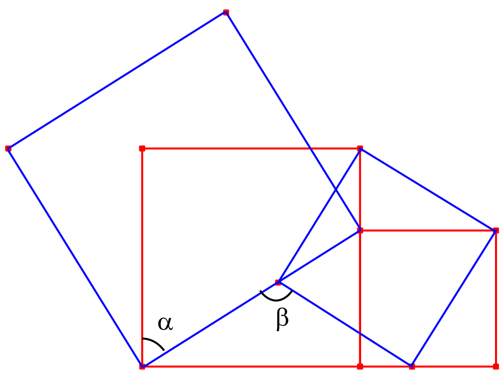
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x$
Siga $\overline{DE} = x$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = x + y$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{GAD}, \overset{\Delta}{EDC}$:
$a^2 = 2x^2 + 2xy + y^2$
$b^2 = x^2 + y^2$
La proporció $\frac{a}{b}$ és:
$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}}$$
Siga $z = \frac{x}{y}$
Considerem la funció:
$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + 1}, \qquad z \in [0, +\infty[$$
El màxim de la proporció s'assoleix en el màxim de $f(z)$
$$f'(z) = \frac{2(-z^2 + z + 1)}{(z^2 + 1)^2}$$
$$f'(x) = 0, \qquad z^2 - z - 1 = 0$$
$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$
$$f"(\Phi) < 0$$
El màxim s'assoleix quan $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
En aquest cas:
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\Phi^4 + \Phi^2}{1 + \Phi^2} = \Phi^2$$

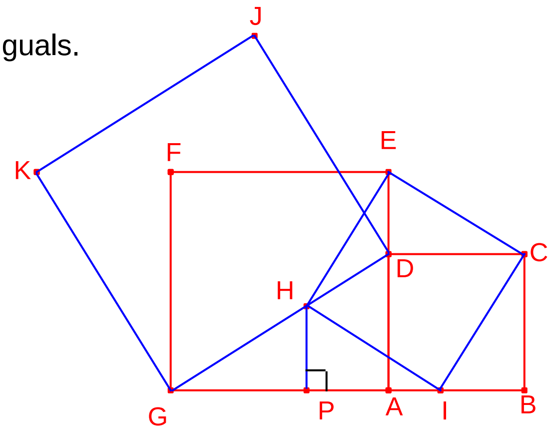
La proporció màxima és:
$$\frac{a}{b} = \Phi$$

4886.- La figura està formada per quatre quadrats
Calculeu $\tan\alpha$, $\tan\beta$



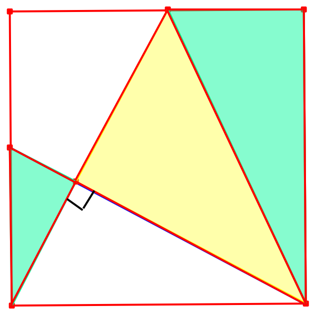
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x$
Siga $\overline{DE} = x$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = x + y$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EDG}, \overset{\Delta}{IBC}, \overset{\Delta}{HPI}$ són iguals.
$\overline{HP} = y, \overline{PI} = x$
$\overline{AI} = x - y, \overline{PA} = x - (x - y) = y$
$\overline{GP} = x + y - y = x$

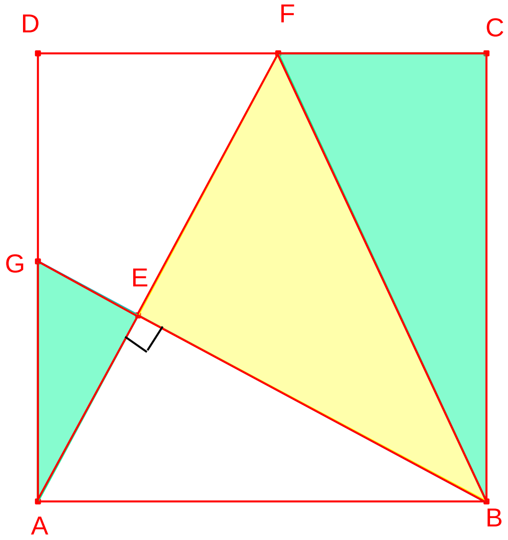


Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EDG},, \overset{\Delta}{HPG}$ són iguals.
Per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EDG},, \overset{\Delta}{DAG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x}$$
$$x^2 - 2xy - y^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$
$$\alpha = \angle FGH = \angle DEC$$
$$\tan\alpha = \frac{x}{y} = \Phi$$
$$\beta = \angle GHI = 2\alpha$$
$$\tan\beta = \tan 2\alpha = \frac{2\Phi}{1 - \Phi^2} = -2$$

4887.- La figura està formada per un quadrat que s'ha dividit amb tres segments en cinc parts.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea verda.



Solució:



AB=1

AG=DF=a, CF=1-a

AEG, BAG semblants

AE=a/sqrt(1+a²)

GE=a²/sqrt(1+a²)

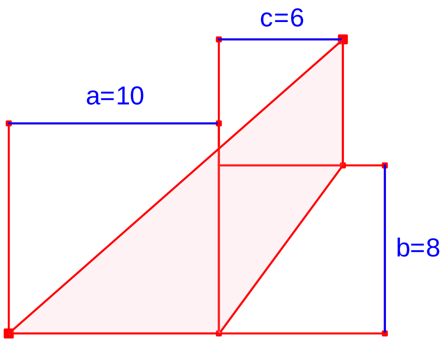
BE=sqrt(1+a²)-a²/sqrt(1+a²)

EF=sqrt(1+a²)-a/sqrt(1+a²)

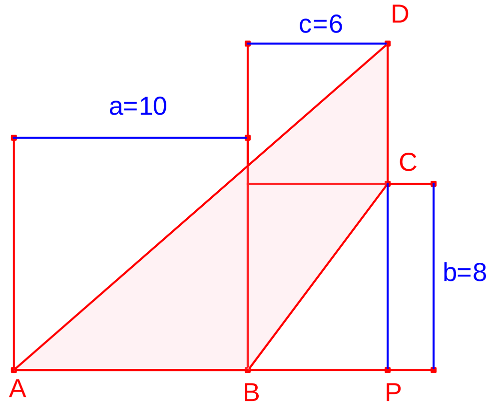
[BEF]=(1/2)BE·EF=(1/2)(a²-a+1)(1+a²)

[AEG]+[BCF]=(1/2)(AE·EG+BC·CF)=(1/2)(a²-a+1)(1+a²)

4888.- La figura està formada per tres quadrats de costats 10, 8 i 6.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada



Solució 1:

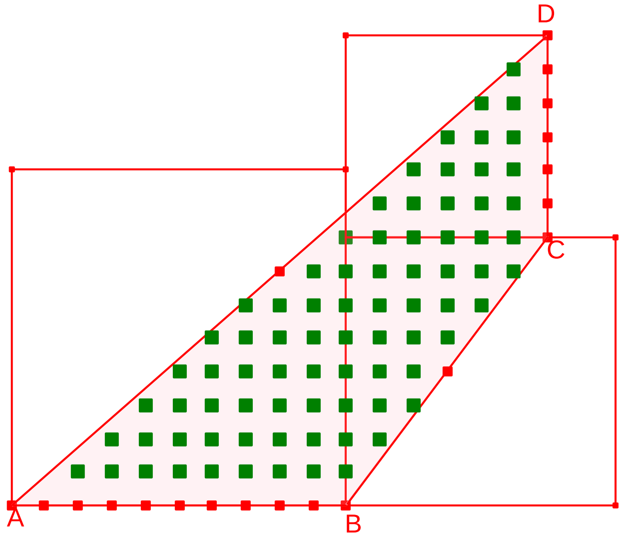


[APD]=(1/2)·16·14=112

[BPC]=(1/2)·6·8=24

[ABCD]=[APD]-[BPC]=88

Solució 2:
Aplicant la fórmula de Pick

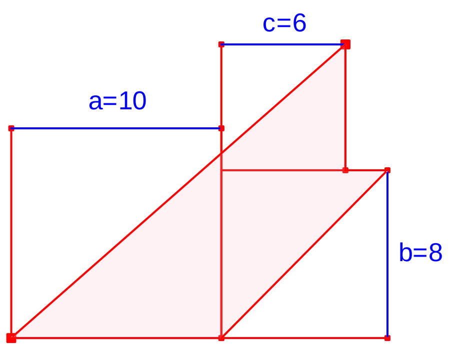


I=interior=79

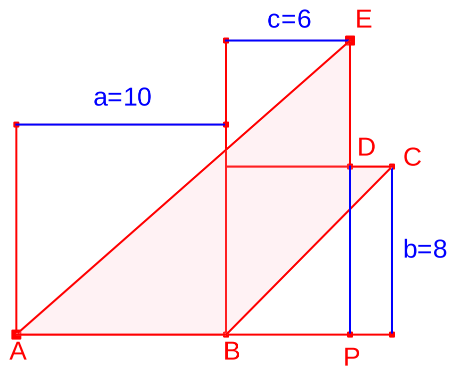
V=vora=20

[ABCD]=I+V/2-1=79+20/2-1=88

4889.- La figura està formada per tres quadrats de costats 10, 8 i 6.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada



Solució 1:



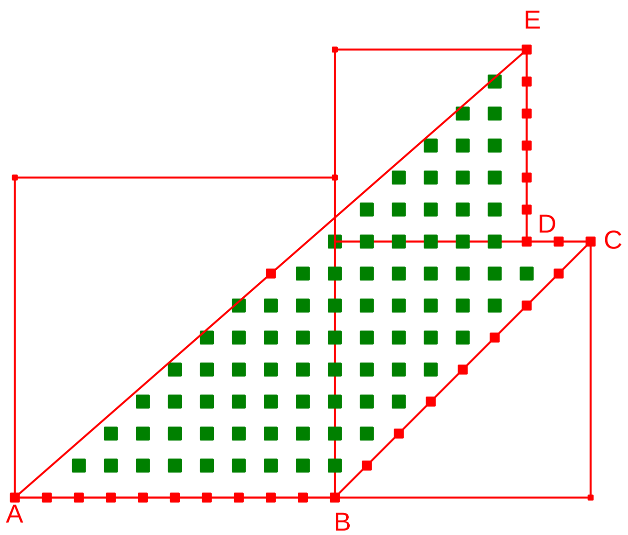
$[APE]=(1/2)\cdot 16\cdot 14=112$

$[BPD]=(1/2)\cdot 6\cdot 8=24$

$[CDB]=(1/2)\cdot 2\cdot 8=8$

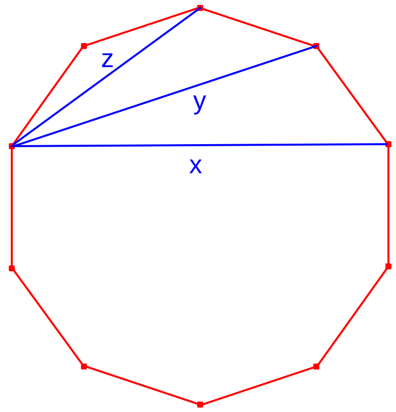
$[ABCDE]=[APD]-[BPC]+[CDB]=96$

Solució 2:
Aplicant la fórmula de Pick

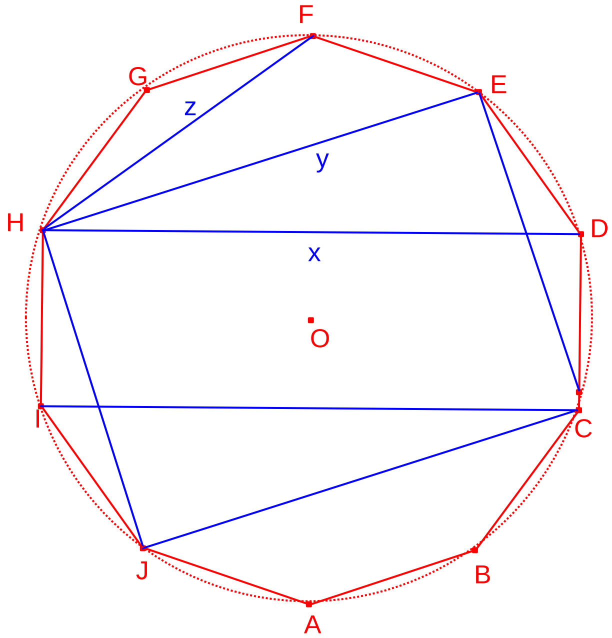


I=interior=83
V=vora=28
$[ABCDE]=I+V/2-1=83+28/2-1=96$

4890.- La figura està formada per un decàgon regular i tres diagonals de longituds x, y, z
Calculeu:
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2}$$



Solució:



Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga $\overline{HF} = z = 1$ costat del pentàgon regular $BDFHJ$
$\overline{HD} = x = \Phi$

$\overline{OC} = c \cdot \Phi, \overline{CH} = 2\Phi \cdot c$

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible $CDHI$:
$$4\Phi^2 c^2 = c^2 + \Phi^2$$
$$c^2 = \frac{\Phi^2}{4\Phi^2 - 1}$$

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible $CEHJ$:
$$y^2 + 1 = 4\Phi^2 c^2$$
$$y^2 = \frac{5 + 8\Phi}{3 + 4\Phi}$$
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = \Phi^2 + \frac{\Phi^2(3 + 4\Phi)}{5 + 8\Phi} = 1 + \Phi + \frac{7 + 11\Phi}{5 + 8\Phi} = \frac{20 + 32\Phi}{5 + 8\Phi} = 4$$