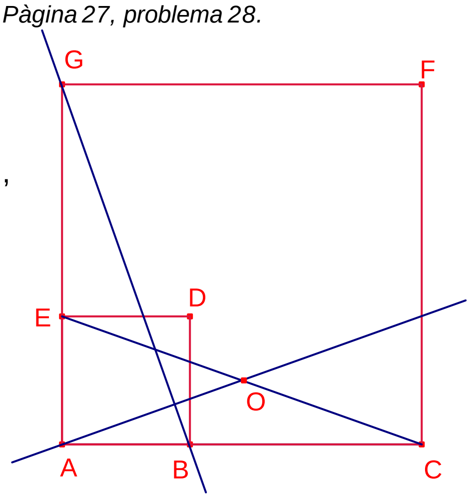
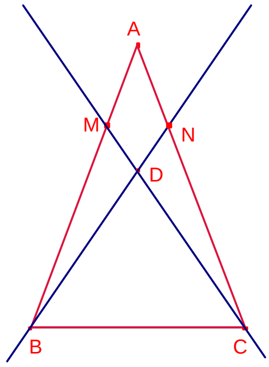
Problemes de Geometria per a l'ESO 49

481.- Siguen A, B, C tres punts alineats (en aquest ordre).
En el mateix semiplànol determinat per la recta AC dibuixem els quadrats ABDE, ACFG.
Dibuixem la recta r que passa per A i és perpendicular a BG.
Proveu que la recta divideix per la meitat el segment $\overline{CE}$.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 27, problema 28.



Solució:
Siga $\alpha = \angle AGB$.
$\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{AC} = \overline{AG}$, aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}$, $\overset{\Delta}{AEC}$ són iguals.
Aleshores, $\angle ACE = \alpha$.
La recta r és perpendicular a BG, aleshores,
$\angle OAC = \alpha$.
Aleshores, $\overline{OA} = \overline{OC}$.
$\angle AEC = 90^o - \alpha$, $\angle EAO = 90^o - \alpha$.
Aleshores, $\overline{OA} = \overline{OE}$.
Aleshores, O és el punt mig de la hipotenusa $\overline{CE}$.
O és el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$.

482.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Siguen M, N dos punts de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament, tal que $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{BC}$.
Siga D la intersecció dels segments $\overline{BN}$, $\overline{CM}$.
Proveu que $\angle BDC = B$.



Siga $x = B = C$, angles iguals del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

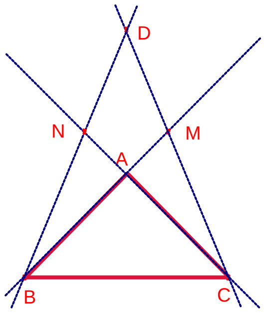
Si $\overline{BM} = \overline{BC}$ el triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle BCM = \angle BMC = \frac{180^o - x}{2} = 90^o - \frac{x}{2}.$$

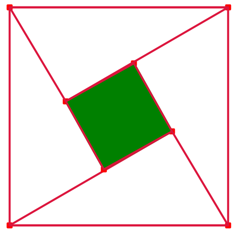
Anàlogament, $\angle NBC = 90^o - \frac{x}{2}$.

$$\angle BDC = 180^o - (\angle BCM + \angle NBC) = x.$$

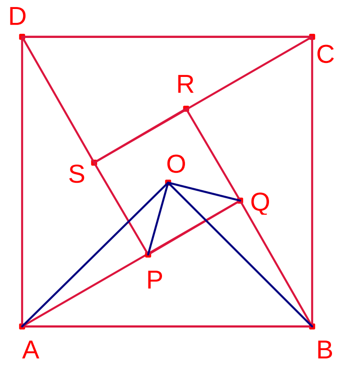
Si $\overline{AB} \le \overline{BC}$ també es compleix.



483.- Per cadascun dels vèrtexs d'un quadrat dibuixem una recta en el mateix sentit i inclinació de 30º. Demostreu que la figura que és forma és un quadrat concèntric a l'inicial. Determineu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.
Bruño, "Geometría. Curso Superior". Pàgina 175, problema 126.



Solució:
Siga ABCD el quadrat inicial de costat $\overline{AB}=c$.
Siga el quadrilàter PQRS que formen les rectes AP, BQ, CR, DS tal que $\angle PAB=\angle QBC=\angle RCD=\angle SDA=30^{\circ}$.
Notem que $\angle DAP=60^{\circ}$, aleshores, $\angle APD=90^{\circ}$.
Anàlogament, $\angle AQB=\angle CRB=\angle CSD=90^{\circ}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABQ}$, $\overset{\Delta}{BCR}$, $\overset{\Delta}{CDS}$, $\overset{\Delta}{DAP}$ són iguals.
Per tant, en el quadrilàter PQRS, $P=Q=R=S=90^{\circ}$.
En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABQ}$, $A=30^{\circ}$, $B=60^{\circ}$, aleshores:

$$\overline{BQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{c}{2},\quad \overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=\overline{AQ}-\overline{BQ}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}c.$$

Anàlogament, $\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}c$.

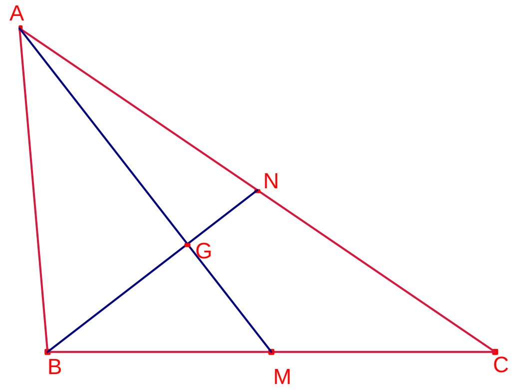
Aleshores, PQRS és un quadrat de costat $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}c$

Siga O el centre del quadrat ABCD.
Els triangles $\overset{\Delta}{APO}$, $\overset{\Delta}{BQO}$ són iguals ja que $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{AP}=\overline{BQ}=\frac{1}{2}c$ i
$\angle OAP=\angle OBQ=45^{\circ}-30^{\circ}=15^{\circ}$, aleshores:
$\overline{OP}=\overline{OQ}$.
Anàlogament, $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}$, aleshores, O és el centre del quadra PQRS.

Les proporció de les àrees dels quadrats és:

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}}=\frac{\overline{PQ}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}c\right)^2}{c^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

484.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a = 7$, $b = 9$ i les mitjanes referides als costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ són perpendiculars.
Determineu la mesura del costat $\overline{AB}$.
Proposta de Vicent Chorro Monserrat.



Solució:
Siguen $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ les mitjanes del triangle.
$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{7}{2}$. $\overline{CN} = \overline{AN} = \frac{9}{2}$
Siga G el baricentre del triangle.
Per la propietat del baricentre:
$\overline{BG} = 2\overline{GN} = 2x$.
$\overline{AG} = \overline{GM} = 2y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMG}$:

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANG}$:

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$5x^2 + 5y^2 = \frac{130}{4} \qquad (3)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{26}{4} \qquad (4)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABG}$:

$$\overline{AB}^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right) \qquad (5)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (5):

$$\overline{AB}^2 = 26.$$

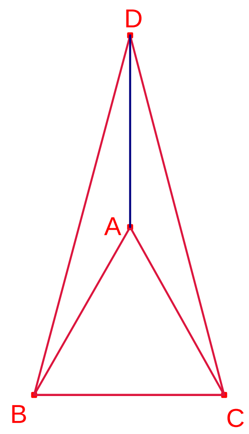
$$\overline{AB} = \sqrt{26}.$$

485.- Sobre el costat $\overline{BC}$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCD}$ tal que $\angle BDC = \frac{1}{2}A$ (A, D en el mateix semiplànol que determina la recta BC).

Proveu que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 26, problema 9.

Solució:



$\angle BDC = \frac{1}{2}A = 30^o$

Per ser $\overset{\Delta}{BCD}$ isòsceles, $\angle CBD = \dfrac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$.

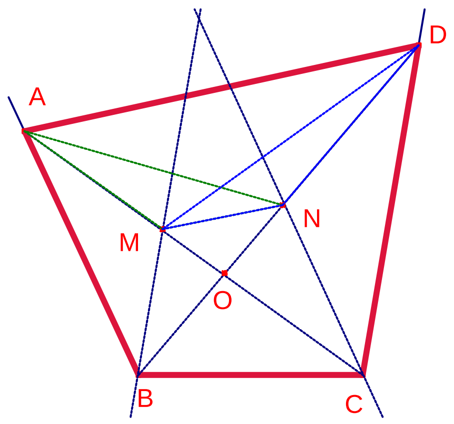
Per ser $\overset{\Delta}{BCD}$ isòsceles, $\angle BDA = \dfrac{30^o}{2} = 15^o$.

$\angle DBA = \angle CBD - B = 75^o - 60^o = 15^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, és isòsceles, $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$.

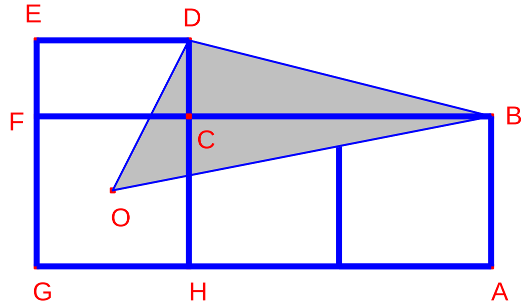
486.- Siga ABCD un quadrilàter convex amb els angles B, C majors que 90º.
Siga O el punt intersecció de les diagonals.
Considerem M en el segment $\overline{AO}$ tal que $\overline{BM}$ és paral·lel a $\overline{CD}$ i N en el segment $\overline{DO}$ tal que $\overline{CN}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.
Proveu que els triangles $\overset{\Delta}{AMN}$, $\overset{\Delta}{DMN}$ tenen la mateixa àrea.
OMA, provincial 2011, Nivell 1.

Solució:
O és la intersecció de les diagonals del trapezi BCDM, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BOC}$, $\overset{\Delta}{DOM}$ tenen la mateixa àrea.



O és la intersecció de les diagonals del trapezi ABCN, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BOC}$, $\overset{\Delta}{AON}$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{AON}$ tenen la mateixa àrea:
$S_{AMN} = S_{AON} - S_{MON} = S_{DOM} - S_{MON} = S_{DMN}$.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{AMN}$, $\overset{\Delta}{DMN}$ tenen la mateixa àrea.

Aleshores, $\overline{AD}$ és paral·lel a $\overline{MN}$.



487.- La figura ABCDEG està formada per tres quadrats iguals i el rectangle CDEF.

$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{CD}$, O és el centre del quadrat CFGH.

El perímetre de ABCDEG és 108cm.

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

Solució:

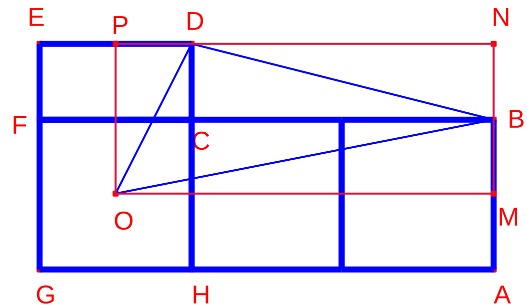
Siga $\overline{CD} = x$.

El perímetre de ABCDEG és:

$108 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EG} + \overline{GA} = 2x + 4x + x + 2x + 3x + 6x$.

$18x = 108$.

$x = 6$.



Siga M la projecció de O sobre $\overline{AB}$.

Siga P la projecció de O sobre $\overline{DE}$.

Siga N la intersecció de les rectes DE, AB.

OMNP és un rectangle, $\overline{OM} = 5x$, $\overline{OP} = 2x$.

L'àrea de la zona ombrejada, que és el triangle $\overset{\Delta}{OBD}$, és:

$$S_{OBD} = S_{OMNP} - S_{OPD} - S_{OMB} - S_{BND} =$$

$$= \overline{OM} \cdot \overline{OP} - \frac{\overline{PD} \cdot \overline{OP}}{2} - \frac{\overline{OM} \cdot \overline{MB}}{2} - \frac{\overline{DN} \cdot \overline{BD}}{2} =$$

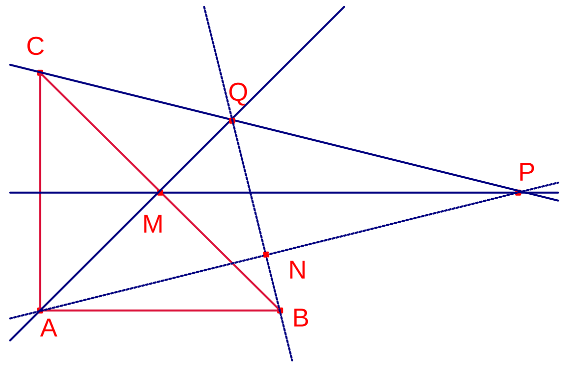
$$= 5x \cdot 2x - \frac{x \cdot 2x}{2} - \frac{5x \cdot x}{2} - \frac{4x \cdot x}{2} =$$

$$= \frac{9}{2}x^2 = \frac{9}{2}36 = 162\text{cm}^2.$$

488.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, M és el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga P un punt qualsevol de la mediatriu del costat $\overline{AC}$ que pertany a l semiplànol determinat per $\overline{BC}$ que no conté A. Les rectes CP i AM es tallen en el punt Q. Determineu l'angle que formen AP i BQ.

Solució:

Com que la hipotenusa és el costat major,
$\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, isòsceles $A = 90^o$.
Siga N la intersecció de les rectes AP, BQ.
Siga $\alpha = \angle MPC$, aleshores, $\angle PAB = \alpha$.
$\angle CMP = 135^o$, aleshores, $\angle BCQ = 45^o - \alpha$.
$\angle CMQ = 90^o$, $\overline{BM} = \overline{CM}$, aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CMQ}$, $\overset{\Delta}{BMQ}$ són iguals, aleshores, $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.
Per tant, $\angle CBQ = \angle BCQ = 45^o - \alpha$.
Aleshores, $\angle ABN = \angle ABC + \angle CBQ = 90^o - \alpha$.
Aleshores, $\angle ANB = 90^o$.
Per tant, AP i BQ formen un angle recte.



489.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles, $C = 120º$. Siga F el punt mig de la base $\overline{AB}$.
La bisectriu de l'angle $\angle ACF$ intersecta la base $\overline{AB}$ en el punt H.

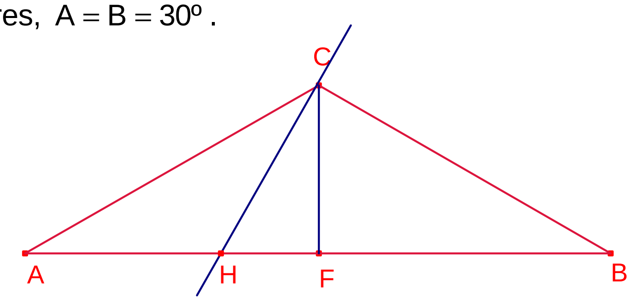
a) Proveu que $\overline{AH} = \overline{CH}$

b) Proveu que $\overline{AH}$ és la tercera part del costat $\overline{AB}$.

KöMaL, K323.

Solució:

En el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ si $C = 120º$, aleshores, $A = B = 30º$.



$\angle ACF = \frac{C}{2} = \frac{120º}{2} = 60º$.

$\angle ACH = \frac{1}{2}\angle ACF = \frac{1}{2}60º = 30º$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{AHC}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{AH} = \overline{CH}$.

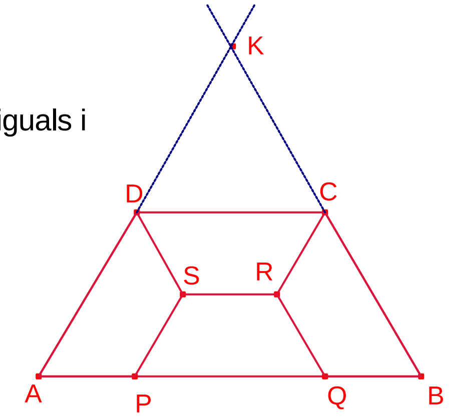
$\angle HCF = 30º$, el triangle $\overset{\Delta}{CHF}$ és rectangle, aleshores:

$\overline{HF} = \frac{1}{2}\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AH}$.

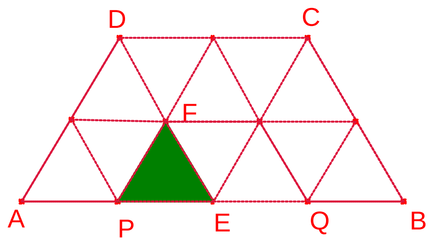
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AF} = 2\left(\overline{AH} + \overline{HF}\right) = 2\left(\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{AH}\right) = 3 \cdot \overline{AH}$.

Aleshores, $\overline{AH}$ és la tercera part del costat $\overline{AB}$.

490.- L'àrea d'un trapezi ABCD isòsceles (no rectangle) és 4 es pot dividir en quatre trapezis iguals i semblants a ABCD.
Determineu les mesures dels angles i les cares del trapezi ABCD.
KöMaL, B4413.



Solució:
Siga ABCD el trapezi isòsceles ABCD, dividit en 4 trapezis iguals i semblants a l'inicial.
Siga $\alpha = A = B$, aleshores, $D = 180^o - \alpha$
Per ser DAPS i CDSR semblants a l'inicial:
$\angle ADS = \alpha$, $\angle CDS = \alpha$.
Aleshores, $D = 2\alpha = 180^o - \alpha$. Resolent l'equació:
$\alpha = 60^o$.
DAPS i CDSR, PQRS són iguals aleshores:
$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{PQ}$.
Les rectes AD, BC es tallen en el punt K.
$\alpha = A = B = 60^o$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{DCK}$ són equilàters:
$\overline{DK} = \overline{CD} = \overline{AD}$.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DK} = 2 \cdot \overline{AD}$.
El trapezi ABCD és pot dividir en 12 triangles equilàters:



Si l'àrea del trapezi és 4 l'àrea de cada triangle equilàter és $\frac{1}{3}$.

$$S_{PEF} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PE}^2.$$

Resolent l'equació:

$$\overline{PE} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}.$$

Aleshores:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \cdot \overline{PE} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}.$$

$$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{PE} = \frac{8}{3}\sqrt[4]{3}.$$