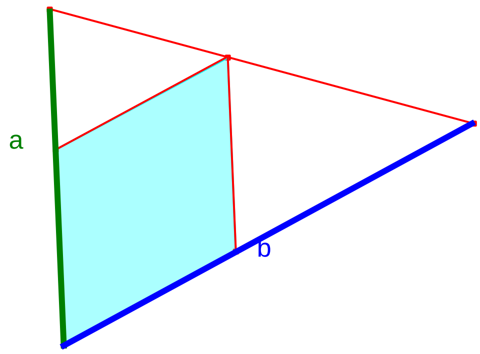
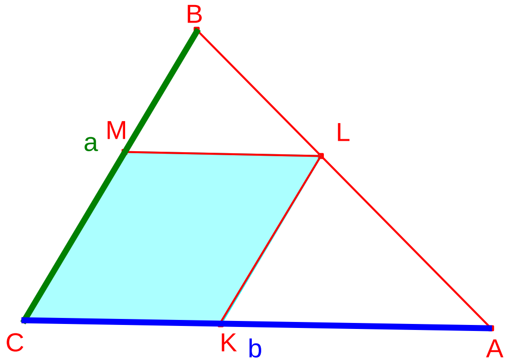
4891.- Un triangle de costats a, b té inscrit un rombe.
Caleu la proporció de l'àrea del rombe i l'àrea del triangle en funció de a, b.



Solució:



CK=c

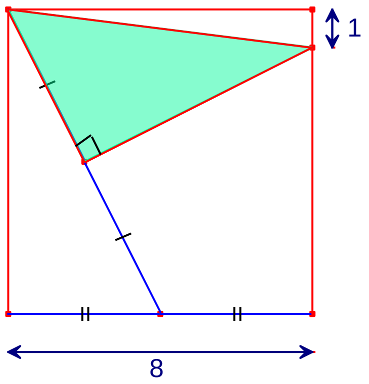
els triangles CAB, MLB semblants

(a-c)/c=c/b

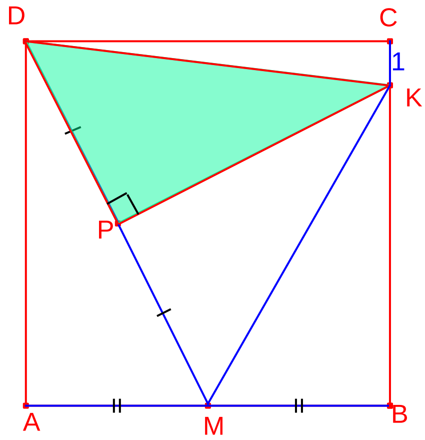
c=ab/(a+b)

[CKLM]/[ABC]=$2c^2$/ab=2ab/$(a+b)^2$

4892.- La figura està formada per un quadrat de costat 8.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Teorema Pitàgores DCK
DK=sqrt(65)

Teorema Pitàgores MBK
MK=sqrt(65)
DMK isòsceeles

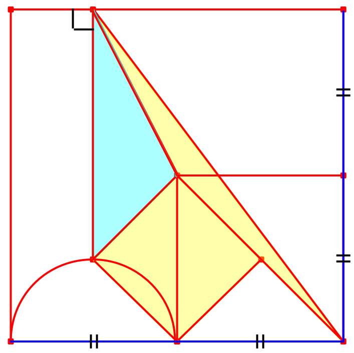
Teorema Pitàgores DAM
DM=4·sqrt(5)

DP=MP=2·sqrt(5)

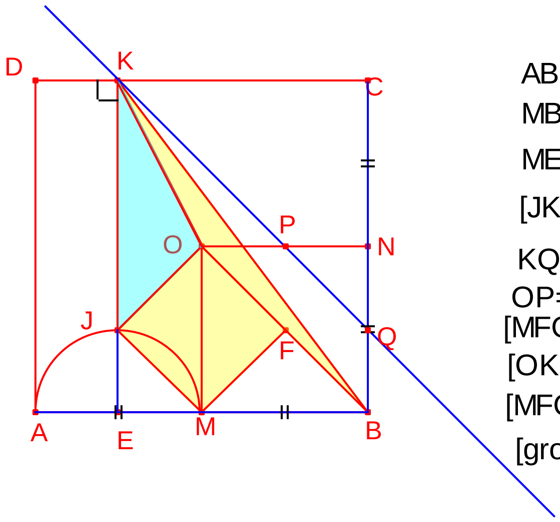
Teorema Pitàgores DPK
PK=3·sqrt(5)

[DPK]=(1/2)·2·sqrt(5)·3·sqrt(5)=15

4893.- La figura està formada per tres quadrats i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava.

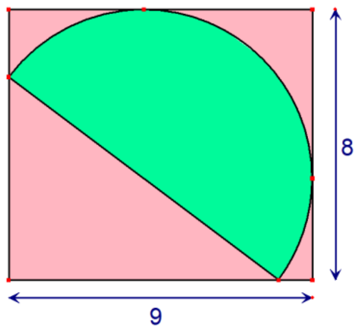


Solució:

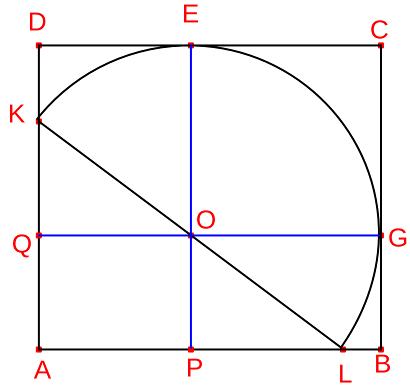


AB=4
MB=2, MF=sqrt(2)
ME=1, JK=3
[JKO]=(1/2)JK·ME=3/2
KQ paral·lela OB
OP=1
[MFOJ]=2
[OKB]=[OPB]=(1/2)1·2=1
[MFOJ]+[OKB]=3
[groga]/[blava]=2

4894.- La figura està formada per un rectangle de costats 9 i 8 i una semicircumferència inscrita tangent a dos costats.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 8$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OE} = \overline{OG} = \overline{OK} = \overline{OL} = r$
$\overline{OP} = 8 - r, \overline{OQ} = 9 - r$

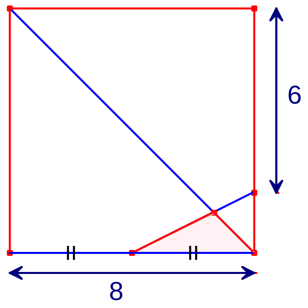


Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{Q}O, O\overset{\Delta}{P}L$ són iguals.
$\overline{KQ} = \overline{OP} = 8 - r$

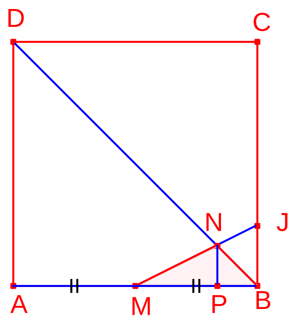
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{Q}O$:
$r^2 = (8 - r)^2 + (9 - r)^2$
$r^2 - 34r + 145 = 0$
Resolent l'equació:
$r = 5$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot 5^2}{9 \cdot 8 - \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2} = \frac{25\pi}{144 - 25\pi} \approx 1.1998$$

4895.- La figura està formada per un quadrat de costat 8. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

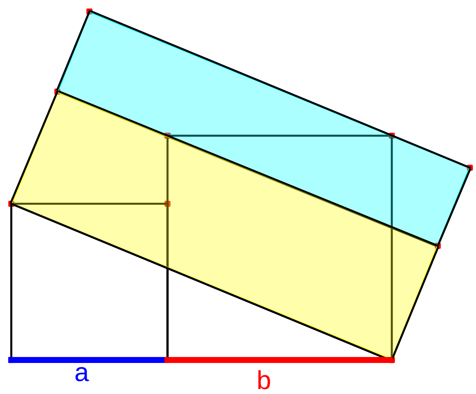


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$
Siga $\overline{CJ} = 6, \overline{BJ} = 2$
$\overline{MB} = 4$
Siga P la projecció de N sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{BP} = \overline{NP} = h$
$\overline{MP} = 4 - h$

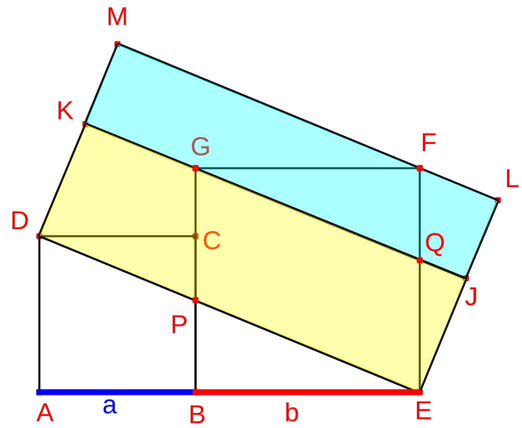


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPN}, \overset{\Delta}{MBJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{h}{4-h} = \frac{2}{4}$$
Resolent l'equació:
$$h = \frac{4}{3}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBN}$ és:
$$S_{MBN} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

4896.- La figura està formada per dos quadrats i dos rectangles.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles blau i groc.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$



Siga $\overline{EL} = c$
Siga $\overline{BP} = \overline{FQ} = e$
Siga $x = \overline{EJ}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{PBE}$són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{e}{b} = \frac{a}{a+b}$$

$$e = \frac{ab}{a+b}$$

$$\overline{PG} = \overline{EQ} = b - e = \frac{b^2}{a+b}$$

Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{FLE}, \overset{\Delta}{QJE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{b-e} = \frac{c}{b}$$

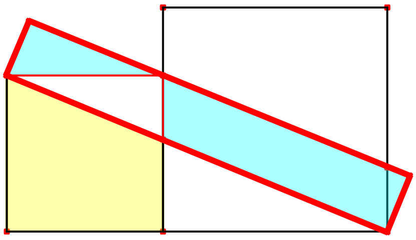
$$x = \frac{bc}{a+b}$$

$$c - x = \frac{ac}{a+b}$$

La proporció entre les àrees dels dos rectangles és:

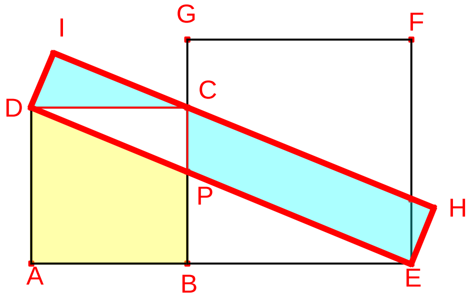
$$\frac{S_{KJLM}}{S_{DEJK}} = \frac{c-x}{x} = \frac{\frac{ac}{a+b}}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a}{b}$$

4897.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles blau i groc.



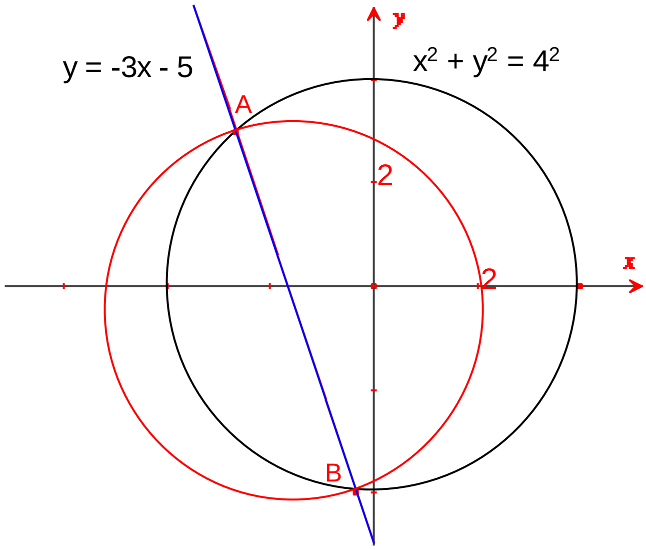
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga $\overline{PC} = x$
Siga $\overline{DI} = \overline{EH} = y$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:
$\overline{DE} = \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}$

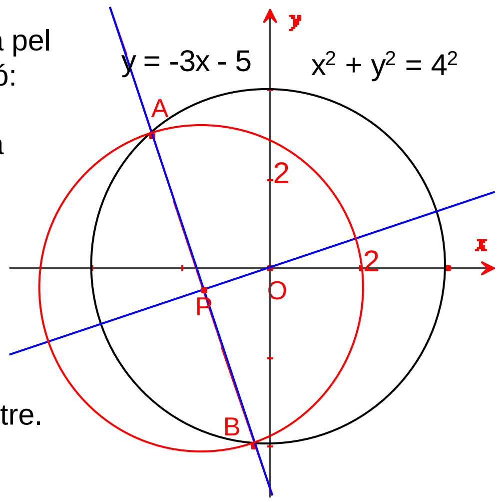


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{PCD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{a} = \frac{a}{a+b}$$
$$x = \frac{a^2}{a+b}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{DIC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{y}{a} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}}$$
$$y = \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}}$$
L'àrea blava és:
$$S_{blava} = S_{DEHI} - S_{PCD} = y\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2} + \frac{1}{2}ax = \frac{a^3 + 2a^2b}{2(a+b)}$$
L'àrea groga és:
$$S_{groga} = S_{ABPD} = \frac{2a - x}{2} \cdot a = \frac{a^3 + 2a^2b}{2(a+b)}$$
Les dues àrees són iguals.

4998.- En la figura, la intersecció de la circumferència $x^2 + y^2 = 16$ i la recta $3x + y + 5 = 0$ formen els extrems del diàmetre de l'altra circumferència.
Determineu l'equació de la segona circumferència.



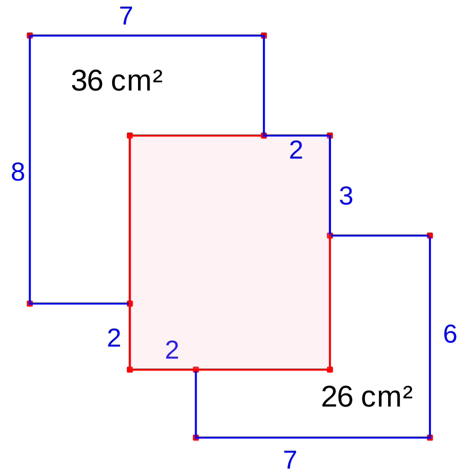
Solució:
La recta perpendicular a la recta $3x + y + 5 = 0$ que passa pel centre $O(0,0)$ de la circumferència $x^2 + y^2 = 16$ té equació:
$-x + 3y = 0$
La intersecció de les dues rectes és el centre de la segona circumferència.



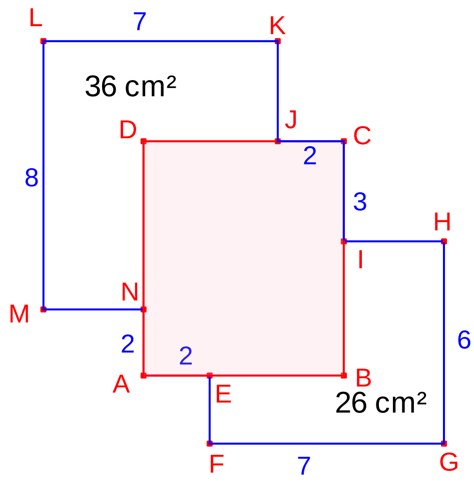
$\begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$
Resolent el sistema, les coordenades del centre són:
$P\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
La intersecció de la recta $3x + y + 5 = 0$ i la circumferència $x^2 + y^2 = 16$ formen els extrems del diàmetre.
$\begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$
La coordenades dels extrems del diàmetre són:
$A\left(\frac{-15 - 3\sqrt{15}}{10}, \frac{-5 + 9\sqrt{15}}{10}\right), B\left(\frac{-15 + 3\sqrt{15}}{10}, \frac{-5 - 9\sqrt{15}}{10}\right)$

El radi de la circumferència és:
$R = d(P, B) = \left\|\left(\frac{3\sqrt{15}}{10}, \frac{-9\sqrt{15}}{10}\right)\right\| = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$
L'equació de la circumferència és:
$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$
$x^2 + y^2 + 3x + y - 11 = 0$

4899.- La figura està formada per tres rectangles sobreposats.
Calculeu l'àrea del rectangle central.



Solució:

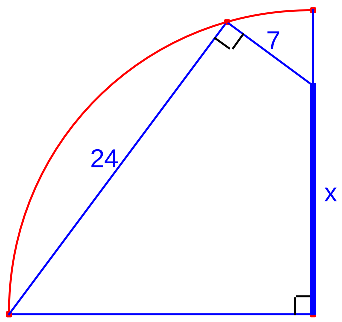


Siga $\overline{EB} = \overline{DJ} = x$
Siga $\overline{BI} = y$

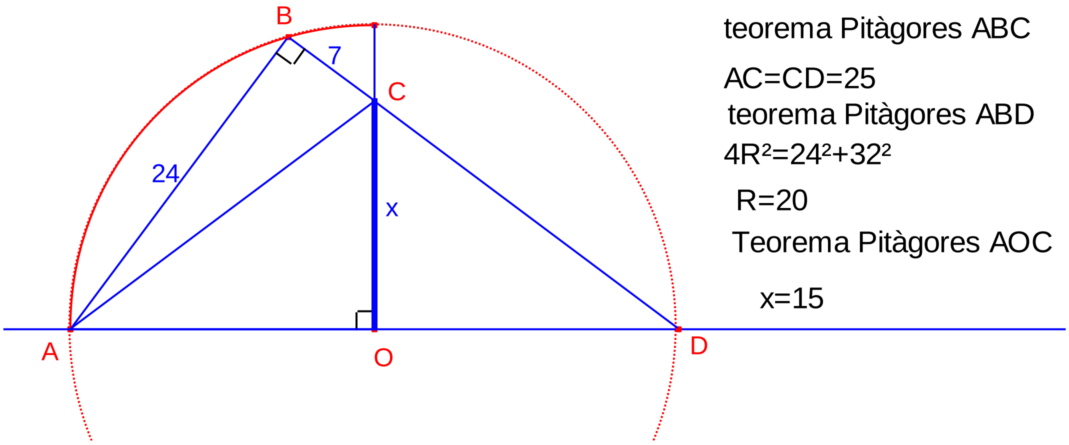
$\overline{FE} = 6 - y, \overline{IH} = 7 - x$
L'àrea del polígon $EFGHIB$ és 26:
$(7 - x)6 + x(6 - y) = 26$
$xy = 16$

$\overline{MN} = 7 - x, \overline{ND} = 3 + y - 2 = y + 1, \overline{JK} = 8 - (y + 1) = 7 - y$
L'àrea del polígon $MNDJKL$ és 36:
$(7 - x)8 + x(7 - y) = 36$
$x + xy = 20$
Considerem el sistema format per les dues expressions:
$\begin{cases} xy = 16 \\ x + xy = 20 \end{cases}$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$
$\overline{AB} = 2 + x = 6, \overline{BC} = y + 3 = 7$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 6 \cdot 7 = 42$

4900.- En el quadrant de la figura calculeu la mesura del segment x



Solució:



OA=R

teorema Pitàgores ABC

AC=CD=25

teorema Pitàgores ABD

$4R^2=24^2+32^2$

R=20

Teorema Pitàgores AOC

x=15