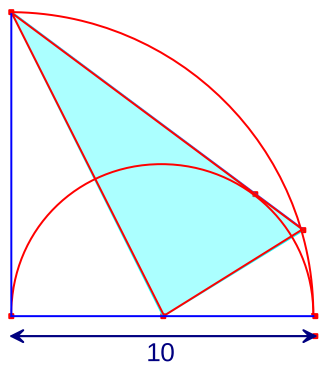
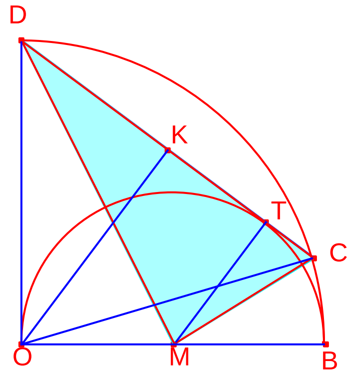
4901.- La figura està formada per una semicircumferència que té el diàmetre sobre el radi d'un quadrant de radi 10 i una circumferència que té un costat tangent a la semicircumferència.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OD} = 10$
Siga la semicircumferència de centre M i diàmetre $\overline{OA} = 10$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOM}$:
$\overline{DM} = 5\sqrt{5}$

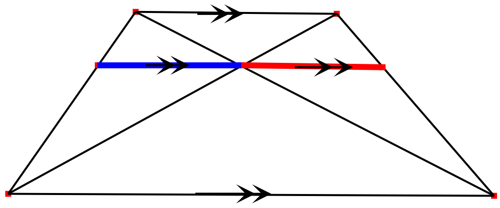
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}, \overset{\Delta}{DTM}$ són iguals.
Siga $\alpha = \angle ODM = \angle MDC$
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$
Siga $\overline{CD} = x$
Siga K el punt mig del segment $\overline{CD}$



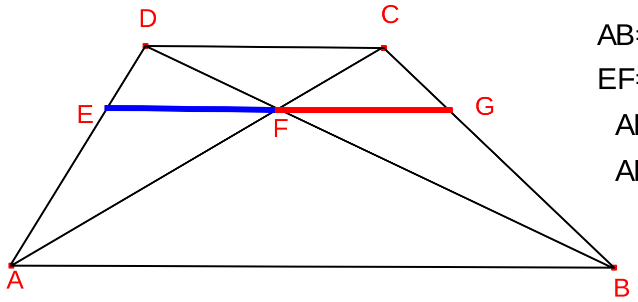
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKD}$:
$\frac{x}{20} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$
$x = 12$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DMC}$ és:
$S_{DMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{MT} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$

4902.- La figura està formada per un trapezi i les seues diagonals.
La paral·lela a les bases que passa pel punt intersecció de les diagonals forma dos segments. Calculeu la proporció entre les longituds dels dos segments que es formen.



Solució:



AB=a, CD=b

EF=x

ABF, CDF semblants i de raó a : b

ABD, EFD semblants

EF/a = DF/DB = b/(a+b)

EF=ab/(a+b)

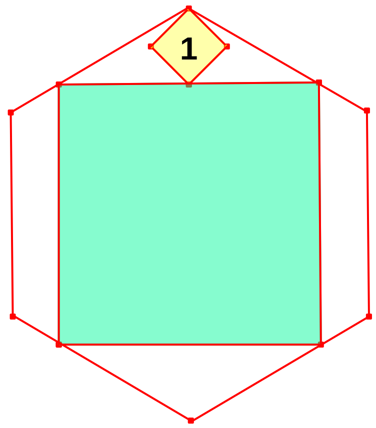
ABC, FGC semblants

FG/a = CF/AC = b/(a+b)

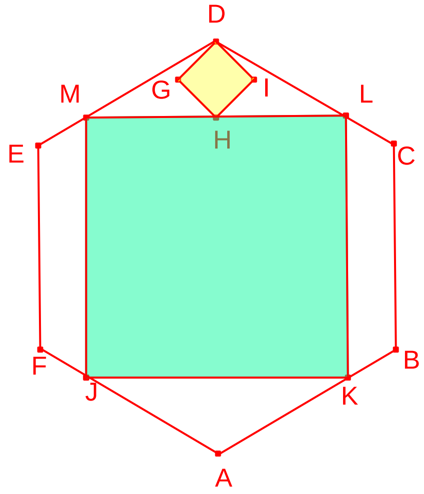
FG=ab/(a+b)

EF=FG

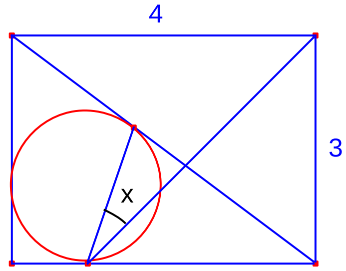
4903.- La figura està formada per un hexàgon regular que conté dos quadrats el menut d'àrea 1. Calculeu l'àrea del quadrat gran.



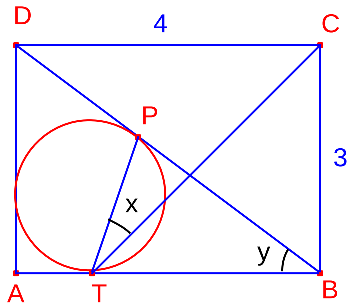
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$.
Siga el quadrat $DGHI$ de costat $\overline{DG} = 1$
$\overline{DH} = \sqrt{2}$
$\angle DMH = 30°, \angle MHD = 90°$
$\overline{MH} = \sqrt{6}$
$\overline{ML} = 2\sqrt{6}$
L'àrea del quadrat $JKLM$ és:
$S_{JKLM} = \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24$



4904.- La figura està formada per un rectangle de costats 4, 3.
Calculeu $\tan x$



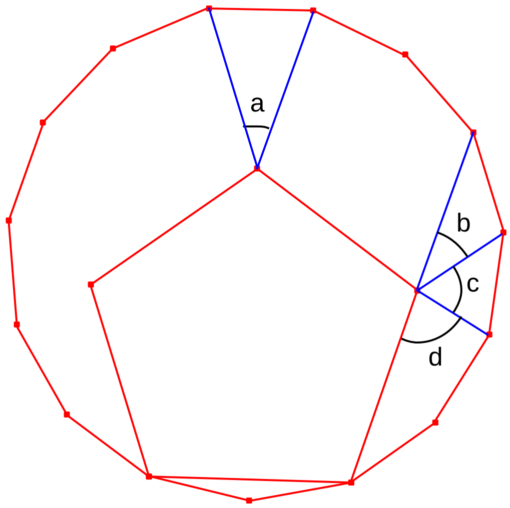
Solució:



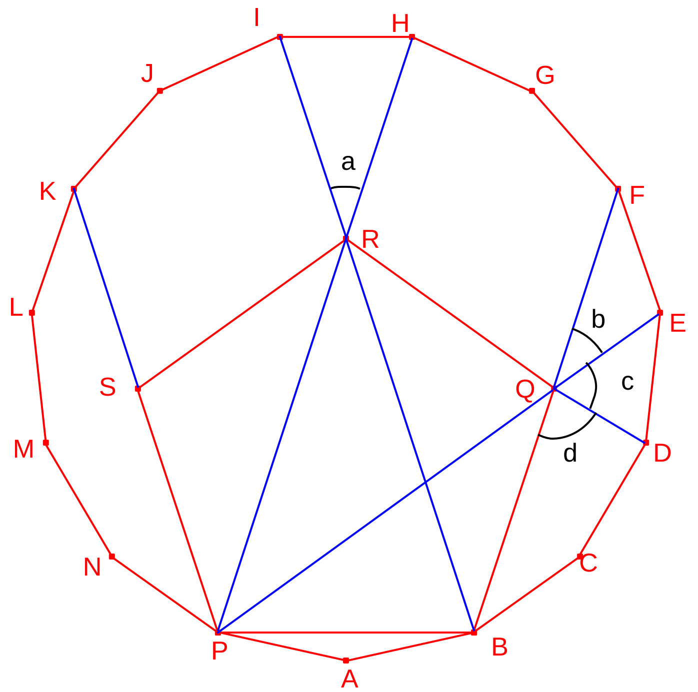
anglePTC=x
AT=1
BP=BP=3
angleCTB=45º
angleTBP=y
tan y= 3/4
tan(y/2)=1/3
anglePTB=90º-y/2

x=45º-y/2
tan x=(1-1/3))/(1+1/3)=1/2

4905.- La figura està formada per un pentàgon regular en l'interior d'un polígon regular de 15 costats.
Calculeu la mesura dels angles a, b, c, d



Solució:



angleKPB=108º

angleSPB=108º

K, S, P alineats

B, Q, F alineats

angleKPH=36º

angleKPR=36º

P, R H alineats

B, R, I alineats

a=angleIRH=anglePRB=36º

angleQFE=36º

angleEPB=36º

P, Q, E alineats

b=angleFQE=angleQPB=36º

QE=FE=DE

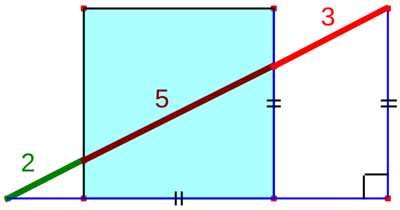
angleQED=48º

c=angleEQD=angleQDE=66º

angleQDC=90º

d=angleBQD=180º-(b+c)=78º

4906.- En la figura calculeu l’àrea del quadrat ombrejat.



Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JAK}, \overset{\Delta}{JBL}, \overset{\Delta}{JNM}$ són semblants i de raó $2 : 7 : 10$

Siguen $\overline{JA} = 2a, \overline{AB} = 5a, \overline{BN} = 3a, \overline{AK} = 2b, \overline{BL} = 7b, \overline{NM} = 10b$

$\overline{AB} = \overline{NM}$

$5a = 10b$

$a = 2b$

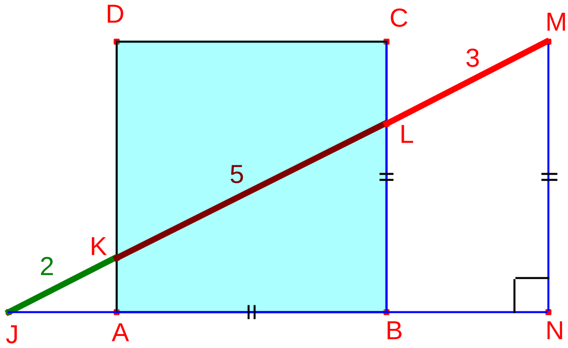
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JAK}$:

$4 = 4a^2 + a^2$

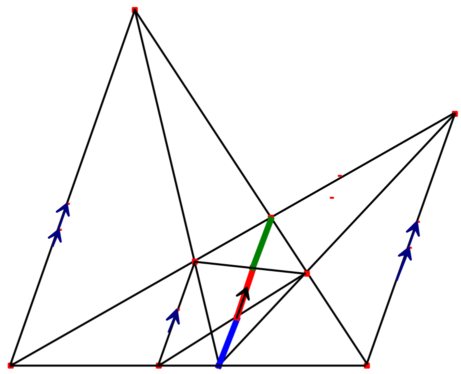
$a^2 = \frac{4}{5}$

L’àrea del quadrat $ABCD$ és:

$S_{ABCD} = 25a^2 = 20$

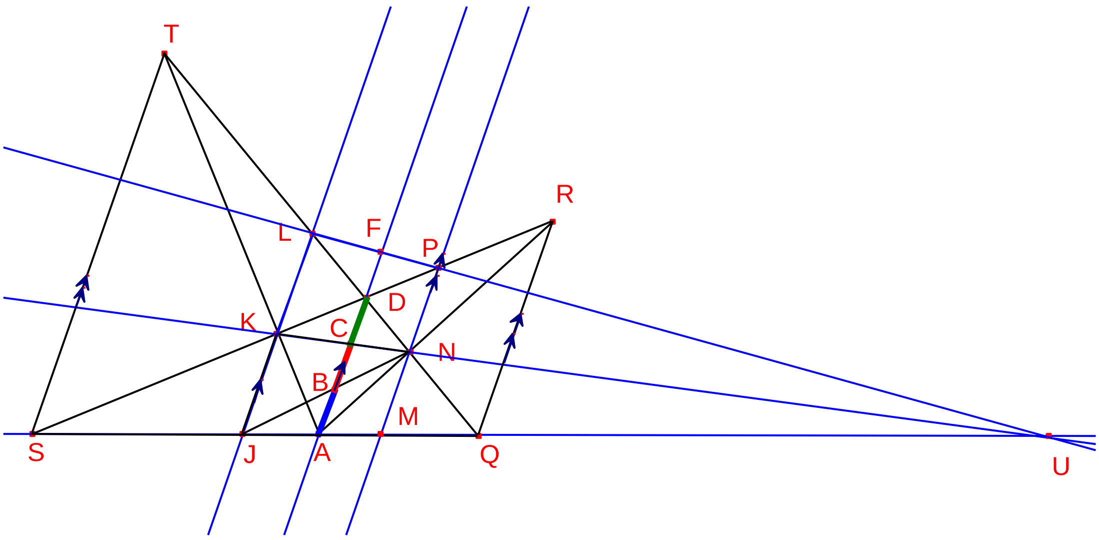


4907.- La figura està formada per quatre segments paral·lels
Calculeu la proporció entre els segments $blau : roig : verd$



Solució:
Siguen $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$

$SADT$ és un trapezi, aleshores: $\overline{JK} = \overline{LK}$
$AQRD$ és un trapezi, aleshores: $\overline{MN} = \overline{PN}$
$\overline{AC} = \overline{FC}$
$KNPL$ és un trapezi, aleshores: $\overline{CD} = \overline{FD}$. Aleshores:
$a + b = 2c$

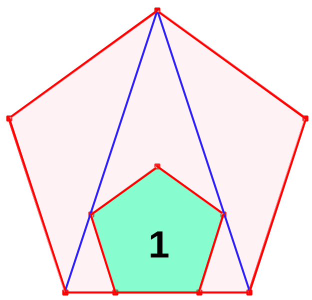


Siguen $\overline{ST} = p, \overline{QR} = q, \overline{JK} = d, \overline{MN} = e, \overline{JA} = s, \overline{AM} = t$
Els triangles $\overset{\Delta}{SQT}, \overset{\Delta}{AQD}$ són semblants: $\frac{p}{\overline{SQ}} = \frac{a+b+c}{\overline{AQ}}$
Els triangles $\overset{\Delta}{SQR}, \overset{\Delta}{SAD}$ són semblants: $\frac{q}{\overline{SQ}} = \frac{a+b+c}{\overline{AS}}$
Aleshores:
$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AQ}} = \frac{p}{q}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{SAT}, \overset{\Delta}{JAK}$ són semblants: $\frac{d}{p} = \frac{s}{\overline{AS}}$
Els triangles $\overset{\Delta}{AQR}, \overset{\Delta}{AMN}$ són semblants: $\frac{e}{q} = \frac{t}{\overline{AS}}$. Aleshores:
$$\frac{d}{e} = \frac{s}{t}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{JAB}, \overset{\Delta}{JMN}$ són semblants: $\frac{e}{\overline{e}} = \frac{s}{s+t}$
Els triangles $\overset{\Delta}{NKJ}, \overset{\Delta}{NCB}$ són semblants: $\frac{b}{\overline{d}} = \frac{s}{s+t}$.Aleshores:
$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \cdot \frac{s}{t} = 1$$
Aleshores, $a = b = c$

4908.- La figura està formada per dos pentàgons regulars. El menut té àrea 1.
Calculeu l'àrea rosa.



Solució:
Siga el pentàgon regular menut $ABCDE$ d'àrea 1 i costat $\overline{AB} = c$

$$\overline{CE} = \overline{BE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}c = c \cdot \Phi$$

Siga el pentàgon gran $FGHIJ$

$$\overline{CI} = c \cdot \Phi \cdot \overline{CE} = c \cdot \Phi^2$$
$$\overline{CG} = \overline{BC} = c$$

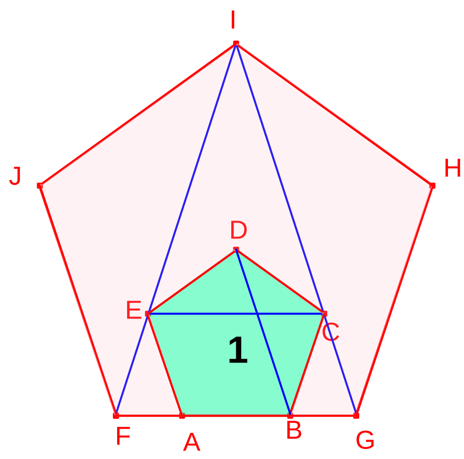
Les àrees dels dos pentàgon són proporcionals al quadrat de les diagonals:

$$\frac{S_{FGHIJ}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{\overline{GI}}{\overline{BD}}\right)^2 = \left(\frac{1+\Phi^2}{\Phi}\right)^2 = 5$$

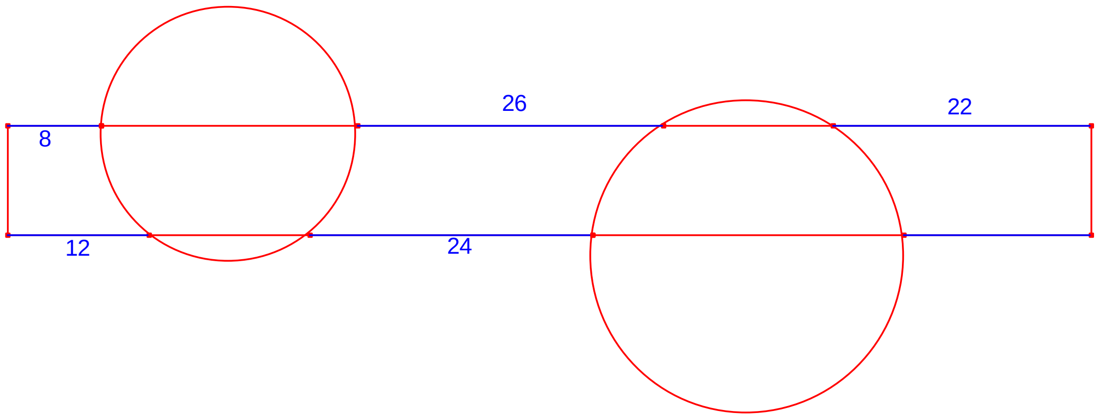
$$S_{FGHIJ} = 5$$

L'àrea rosa és:

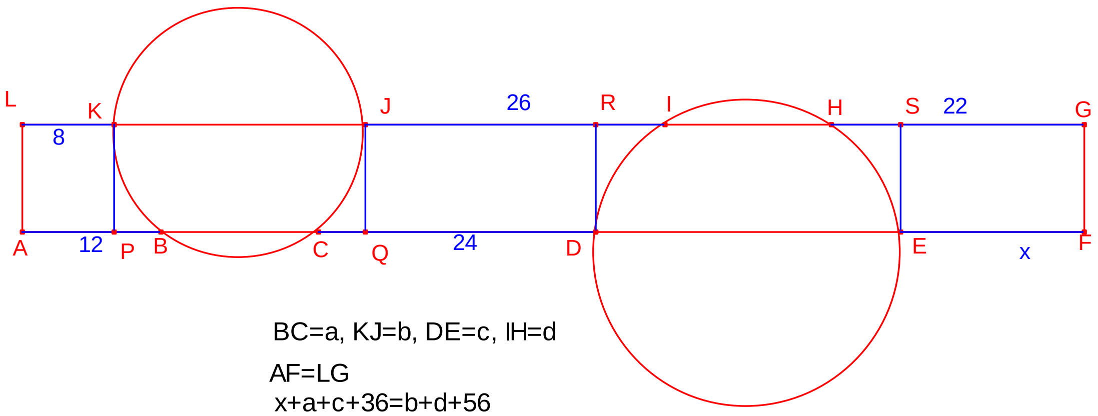
$$S_{rosa} = 5 - 1 = 4$$



4909.- La figura està formada per un rectangle i dues circumferències.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



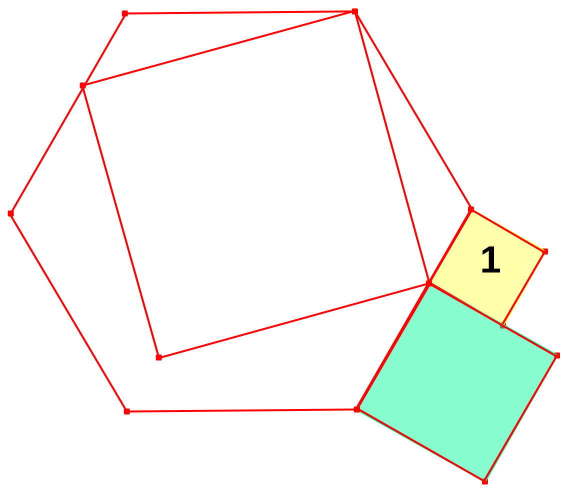
BC=a, KJ=b, DE=c, IH=d

AF=LG
x+a+c+36=b+d+56
x=20+(b-a)+(d-c)

PB=CQ=4, QD=20, RI=6
PQ=PJ, a+8=b
DE=RS, d+12=c

x=20+20+8-12=16

4910.- La figura està formada per un hexàgon regular i tres quadrats.
El quadrat groc té àrea 1.
Calculeu l'àrea del quadrat verd.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $CGHI$ de costat $\overline{CG} = 1$
Siga el quadrat $DLMG$.
$\overline{LG} = c\sqrt{3}$
$\overline{GD} = \frac{\sqrt{2}}{2} c\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} c$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDG}$:
$\frac{3}{2} c^2 = 1 + c^2 + c$
Resolent l'equació:
$c = 1 + \sqrt{3}$
$\overline{BG} = \sqrt{3}$
L'àrea del quadrat $BGJK$ és:
$S_{BGJK} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$