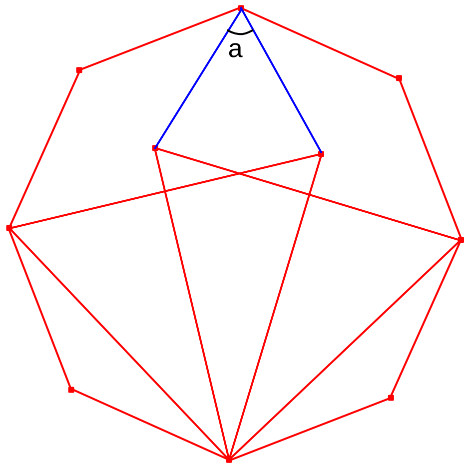
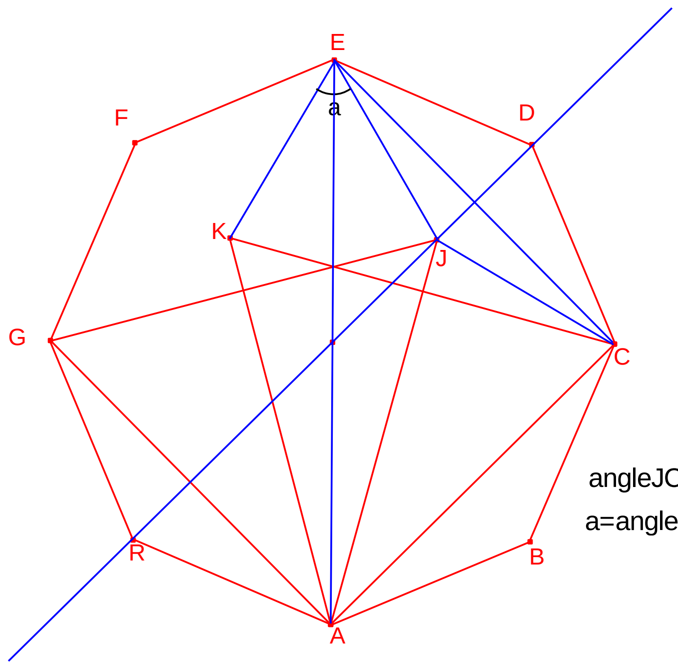
2921.- La figura està formada per un octàgon regular i dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle a



Solució:



angleCAB=angleACB=45º/2

R, J, D alineats

angleEAB=135º/2

angleKAB=60º+45º/2

angleKAE=60º+45º/2-135º/2=15º

angleJAC=30º

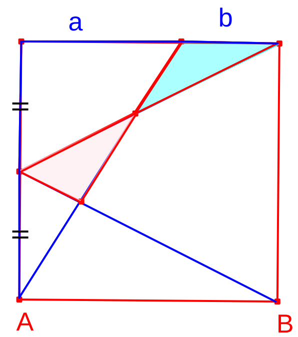
angleACJ=75º

Els triangles DEJ, DCJ iguals

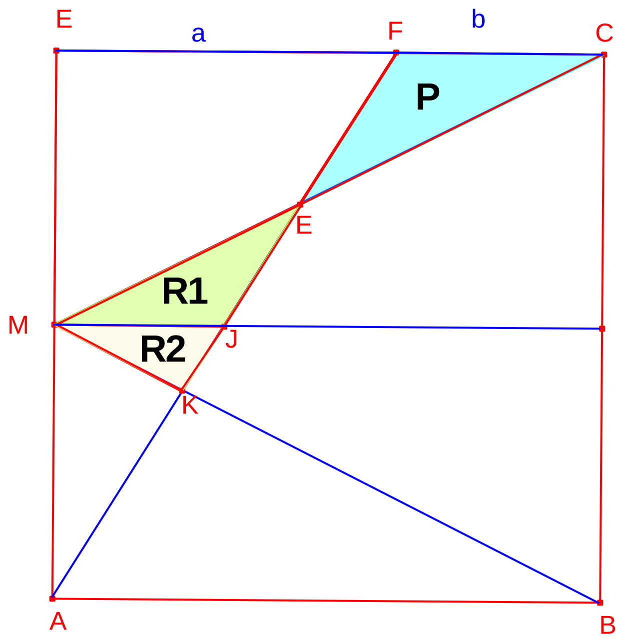
angleJCD=angleJED=135º-(75º+45º/2)=75º/2

a=angleKEJ=135º-2·angleJED=60º

4922.- En la figura els triangles blau i rosa tenen la mateixa àrea.
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:



P=[DCF] R1=[MJE], R2=[MJK]

MJ=a/2

R1/P=(a/(2b))²

ME/CM=a/(a+2b)

MK/MB=a/(3a+2b)

MK/ME=(a+2b)/(3a+2b)

R2/R1 = MK/ME=(a+2b)/(3a+2b)

(R1+R2)=4(a+b)/(3a+2b)·R1

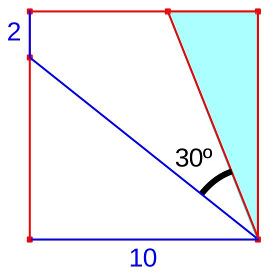
(R1+R2)/P=a²(a+b)/((3a+2b)b²)

(R1+R2)/P=1

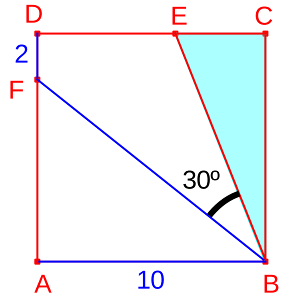
a^3+a²b-3ab²-2b³=0

a/b = (1+sqrt(5))/2 = Φ

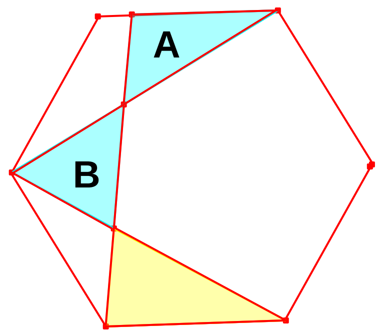
4923.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



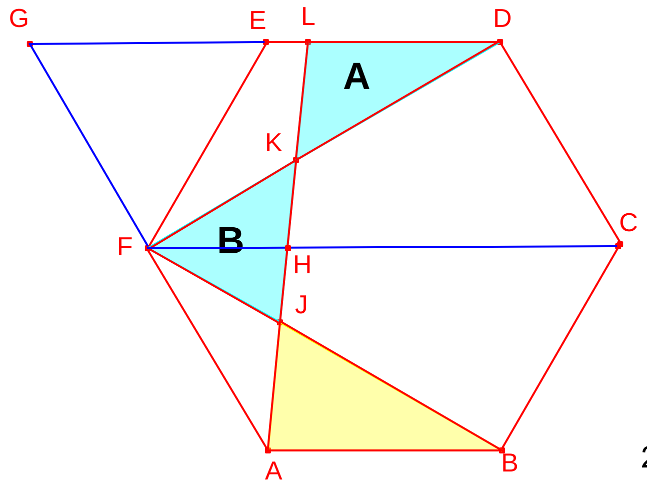
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
$\overline{AF} = 8$
Siga $\overline{CE} = a$
Aiga $\alpha = \angle ABF$
$\tan\alpha = \frac{4}{5}$
$\angle EBC = 60° - \alpha$
$$\tan(60° - \alpha) = \frac{a}{10} = \frac{\sqrt{3} - \frac{4}{5}}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{80 - 41\sqrt{3}}{23}$$
$$a = \frac{10\left(80 - 41\sqrt{3}\right)}{23}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és:
$$S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 10a = \frac{50\left(80 - 41\sqrt{3}\right)}{23} \approx 19.5346$$



4924.- La figura està formada per un hexàgon regulars les àrees dels triangles A i B són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:

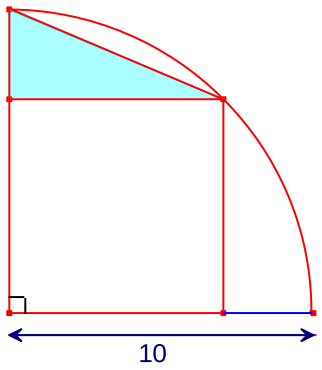


AB=1, FD=FB=sqrt(3)
DL=a, DK=b, FJ=c

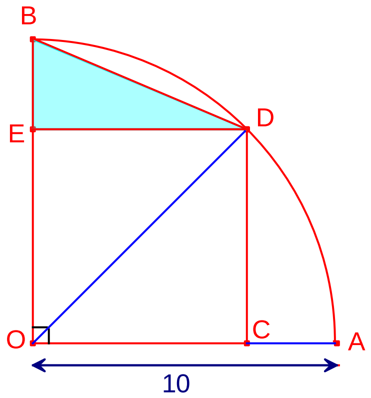
FH=(1/2)GL=(2-a)/2
Triangles DLK, FHK semblants
(2-a)/(2a)=(sqrt(3)-b)/b
b=2a·sqrt(3)/(2+a)
Triangles BAJ, FHJ semblants
(2-a)/2=c/(sqrt(3)-c)
c=(2-a)sqrt(3)/(4-a)

[DLK]=[KFL]
ab=(3-b·sqrt(3))c
$2a^3-5a^2-12a+12=0$
a=(9-sqrt(33))/4
b=(15·sqrt(3)-3·sqrt(11))/16
c=(3*sqrt(3)-3·sqrt(11))/2
[Groga]=(1/4)(sqrt(3)-c)
[Blava]/[Groga]=(2ab)/(sqrt(3)-c)=3/2

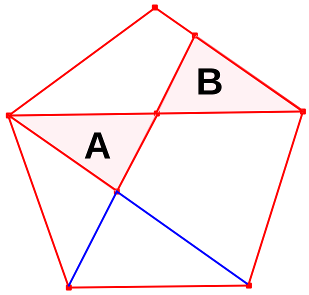
4925.- La figura està formada per un quadrant de radi 10 i un quadrat inscrit.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = 10$
Siga el quadrat de costat $\overline{OE} = \overline{DE} = 5\sqrt{2}$
$\overline{BE} = 10 - 5\sqrt{2}$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$S_{EDB} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2}\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 25\left(\sqrt{2} - 1\right)$



4926.- La figura està formada per un pentàgon regular.
Els triangles ombrejat tenen la mateixa àrea $A = B$
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del pentàgon regular.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{CE} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EKJ}, \overset{\Delta}{CKL}$ són iguals.

$$\overline{EK} = \overline{CK} = \frac{\Phi}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EKJ}, \overset{\Delta}{BAJ}$ són semblants i de raó $\frac{\Phi}{2} : 1$

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{KJ}} = \frac{2}{\Phi}$$

$$S_{ABK} = \left(\frac{2}{\Phi}\right)^2 A$$

$$S_{AJD} = S_{BJK} = \frac{2}{\Phi} A$$

$$S_{ABD} = S_{CDE} = \left(\frac{2}{\Phi} + \frac{4}{\Phi^2}\right) A = (6 - 2\Phi)A$$

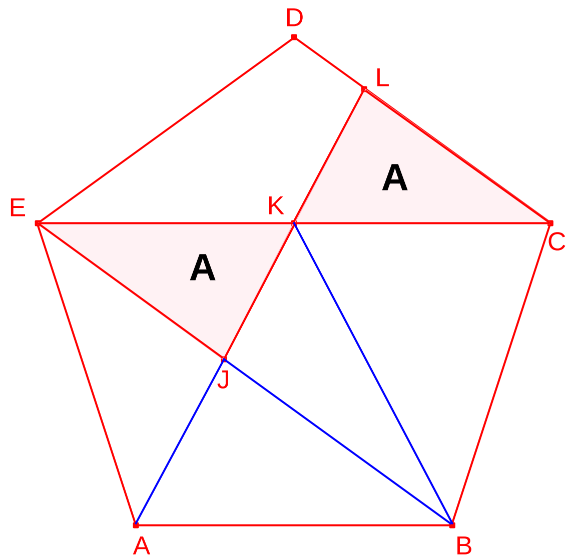
$$S_{BKE} = S_{BCK} = \left(1 + \frac{2}{\Phi}\right) A = (2\Phi - 1)A$$

L'àrea del pentàgon és:

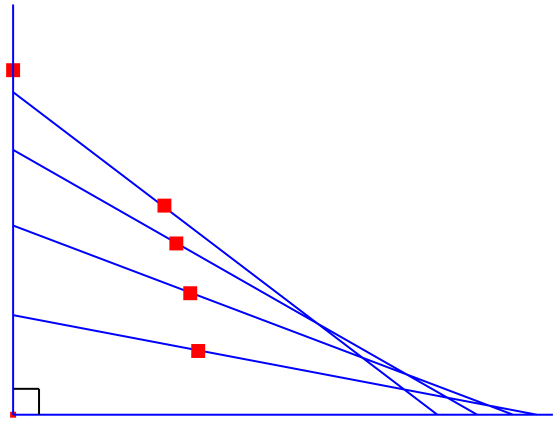
$$S_{ABCDD} = 2 \cdot S_{ABE} + 2 \cdot S_{EKE} = 10A$$

La proporció d'àrees és:

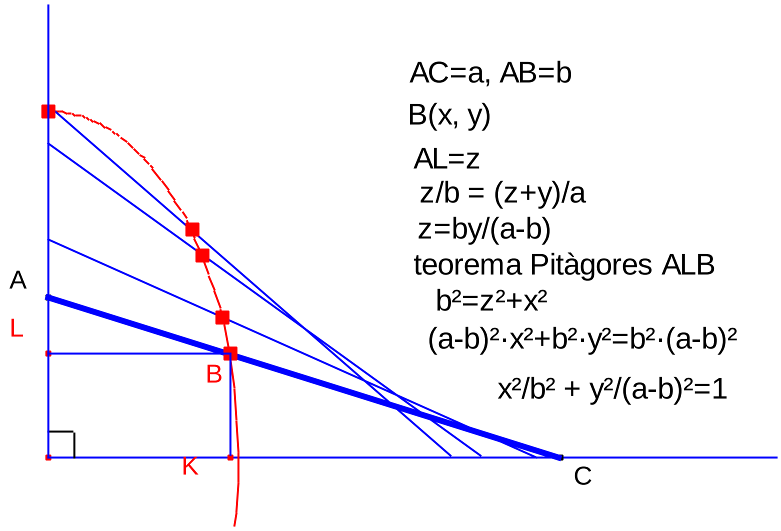
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDE}} = \frac{2A}{10A} = \frac{1}{5}$$



4927.- Una escala vista des del costat està lliscant per una paret. Demostreu que un punt fix de l'escala traça part d'una el·lipse



Solució:



AC=a, AB=b

B(x, y)

AL=z

$z/b = (z+y)/a$

$z=by/(a-b)$

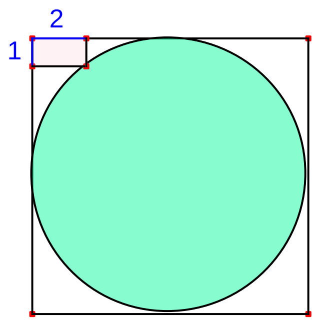
teorema Pitàgores ALB

$b^2=z^2+x^2$

$(a-b)^2\cdot x^2+b^2\cdot y^2=b^2\cdot(a-b)^2$

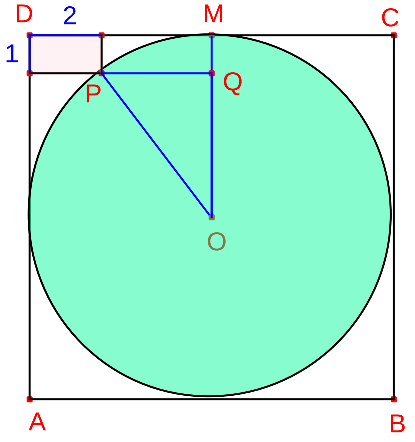
$x^2/b^2 + y^2/(a-b)^2=1$

4928.- La figura està formada per un quadrat que conté la circumferència inscrita i un rectangle de costats 2, 1
Calculeu l'àrea del cercle.

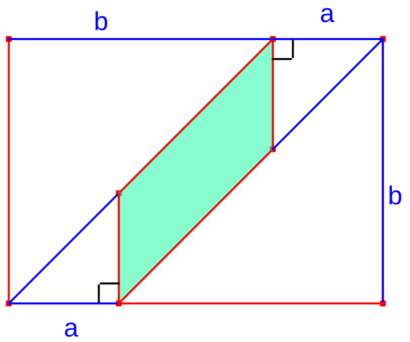


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$
Siga la circumferència inscrita al quadrat de radi $\overline{OP} = \overline{OM} = r$
$\overline{PQ} = r - 2, \overline{OQ} = r - 1$

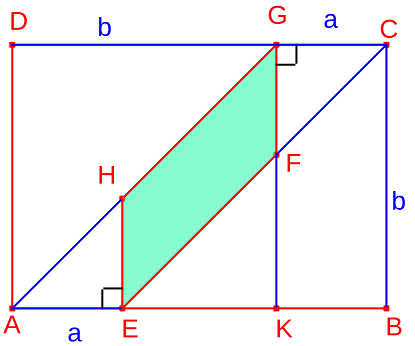
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$r^2 = (r-2)^2 + (r-1)^2$
Resolent l'equació:
$r = 5$
L'àrea del cercle és:
$S_{cercle} = 25\pi$

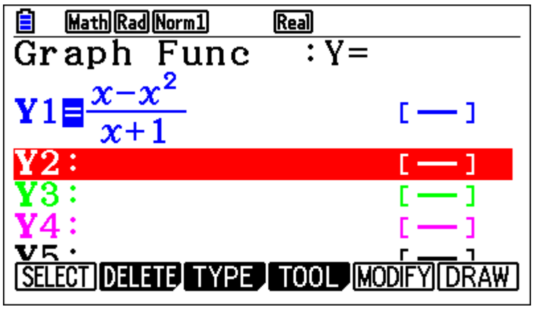


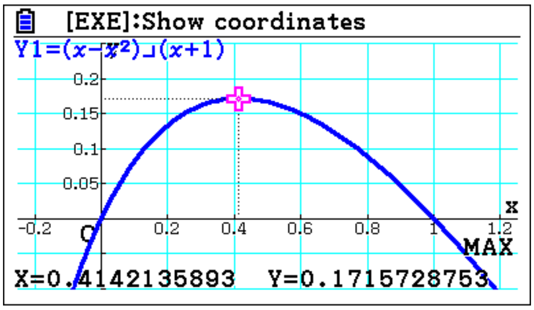
4929.- Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del paral·lelogram ombrejat i l'àrea del rectangle.



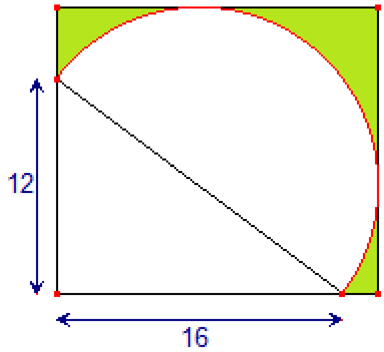
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a + b, \overline{BC} = b$
$\overline{AD} = \overline{DG} = b, \angle DAG = 45°$
$\overline{GF} = \overline{CG} = a$
$\overline{EK} = b - a$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = b(a + b)$
L'àrea del paral·lelogram $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = \overline{GF} \cdot \overline{EK} = a(b - a)$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{a(b - a)}{b(a + b)}$$
Siga $x = \frac{a}{b}$
Considerem la funció proporció d'àrees:
$$p(x) = \frac{x - x^2}{x + 1}$$
$$p'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2}$$
$p'(x) = 0$
$x = -1 + \sqrt{2}$
$p"\left(-1 + \sqrt{2}\right) < 0$
El màxim de la funció s'assoleix quan $x = -1 + \sqrt{2}$
La proporció màxima és:
$p\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 3 - 2\sqrt{2}$



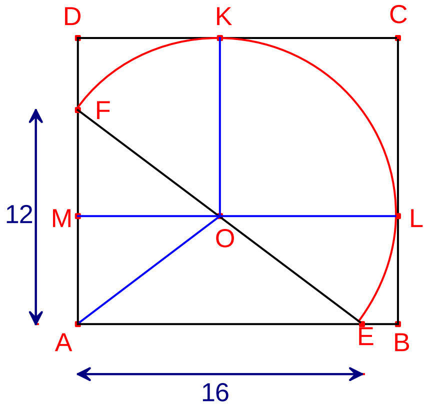




4930.- La figura està formada per un rectangle i un semicercle.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



EF=20

OA=OF=10

BL=AF/2=6

OM=8

AB=18, AD=16

[verda]=18·16-(1/2)16·12-(1/2)10^2·Pi=192-50·Pi