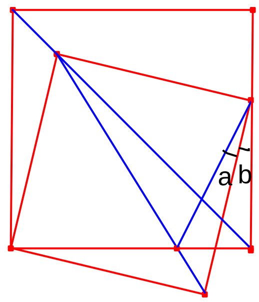
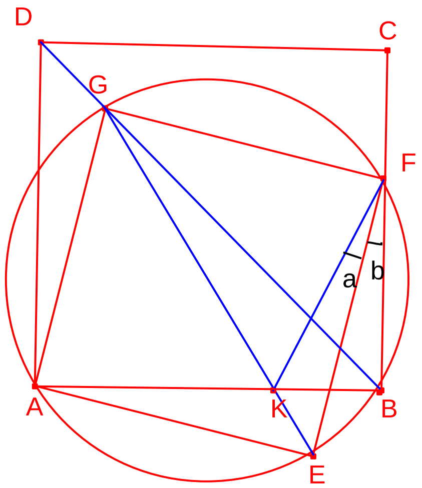
Problemes de Geometria per a l'ESO 494

4931.- La figura està formada per dos quadrats.
Proveu que els angles a, b són iguals.



Solució:



angleKFE=a

angleEFB=b

angleBAE=angleDAG=angleEFB=b

AEBFG cíclic

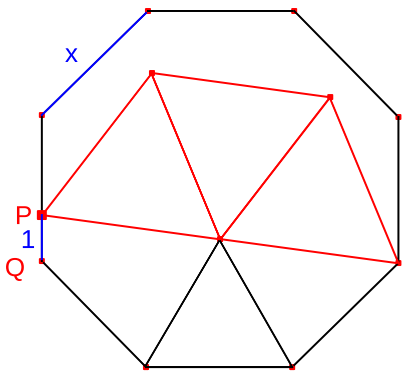
angleAEK=angleFEK=45º

AE=FE

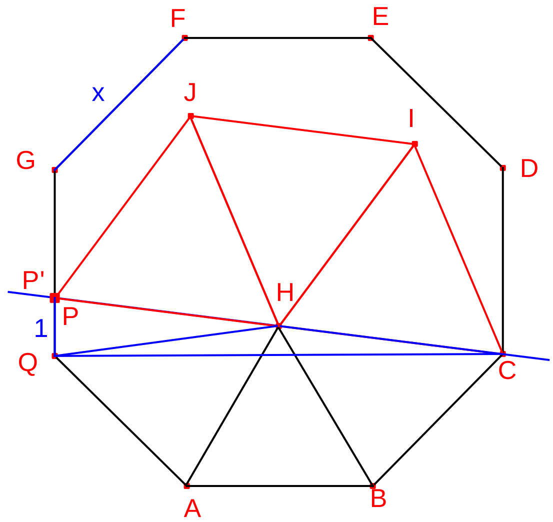
els triangles AKE, FKE iguals

a=angleKFE=angleKAE=b

4932.- La figura està formada per un octògon regular i quatre triangle equilàters
Determineu el costat x de l'octògon regulars



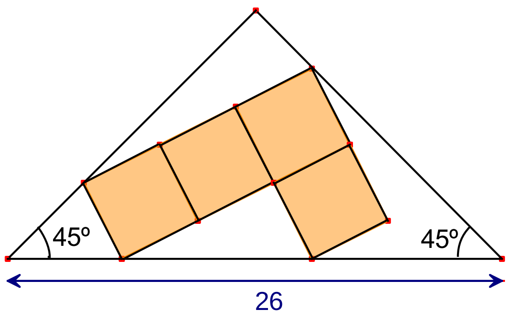
Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGQ$ de costat $\overline{AB} = x$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABH}$ de costat $\overline{AB} = x$
Siguen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{CHI}, \overset{\Delta}{HIJ}, \overset{\Delta}{HJP}$
La recta CH talla el costat $\overline{GQ}$ en el punt P'



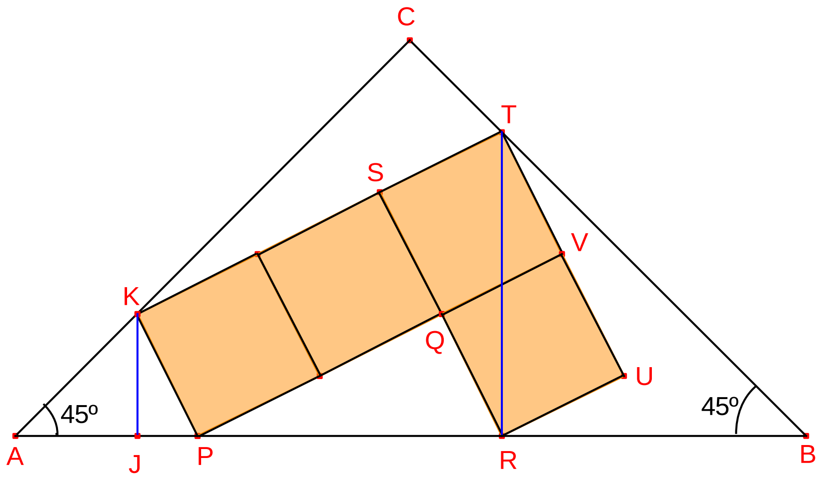
$\angle HBC = 75°$
$\angle BHC = \angle CHB = \dfrac{105°}{2}$
Els triangles $\overset{\Delta}{BCH}, \overset{\Delta}{AQH}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CH} = \overline{QH}$
$\angle QCP' = \dfrac{105°}{2} - 45° = \dfrac{15°}{2}$
$\angle P'QC = 90°$
$\angle QP'C = \dfrac{105°}{2}$
$\angle HQC = \angle HCQ = \dfrac{15°}{2}$
$\angle P'QH = \dfrac{105°}{2}$
$\overline{QH} = \overline{HP'} = \overline{HC} = \overline{HP}$
Aleshores els punts P', P coincideixen.
Aleshores, P pertany al costat $\overline{GQ}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCH}$
$\overline{CH}^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos 75° = \dfrac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} x^2$
$\overline{CQ} = \left(1 + \sqrt{2}\right)x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC}$:
$4 \cdot \dfrac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} x^2 = 1 + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)x^2$
$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)x^2 = 1$
$x = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

4933.- La figura està formada per un triangle isòsceles d'angles iguals de 45º i el costat desigual mesura 26, i quatre quadrats.
Calculeu l'àrea ombrejada pels quatre quadrats.



Solució:



Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$
Siga el quadrat $QRUV$ de costat $\overline{QR} = c$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{RST}$ són iguals i tenen els costats perpendiculars.
$\overline{RB} = \overline{PR} = \overline{RB} = c\sqrt{5}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{KJP}$ són semblants i de raó $\sqrt{5} : 1$
Aplicant el teorema de Tales:

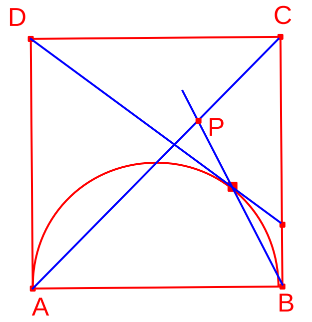
$$\overline{PJ} = \frac{1}{\sqrt{5}} c = \frac{\sqrt{5}}{5} c$$

$$\overline{KJ} = \overline{AJ} = \frac{2\sqrt{5}}{5} c$$

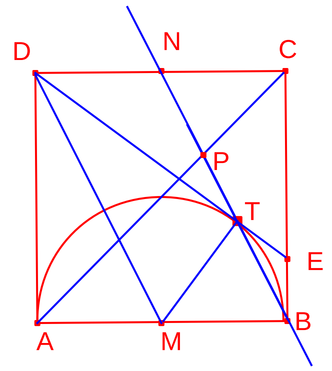
$$\overline{AB} = 26 = \frac{13\sqrt{5}}{5} c$$

$c = 2\sqrt{5}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 4c^2 = 80$

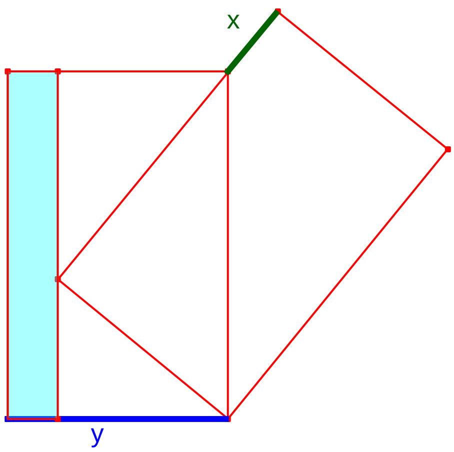
4934.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$, la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$, la recta tangent a la semicircumferència que passa per D.
Proveu que $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CP}$



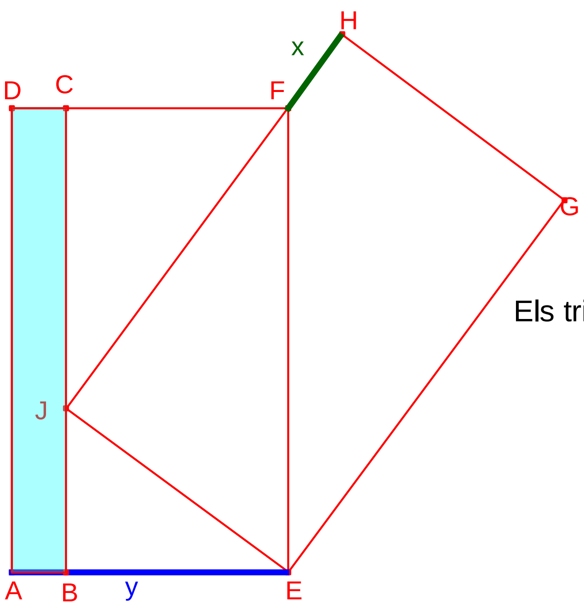
Solució:
Siga T el punt de tangència.
Siga DE la recta tangent.
$\overline{TE} = \overline{BE}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre de la semicircumferència.
Siga $\alpha = \angle ADM = \angle TDM$
$\angle DEC = 2\alpha$
$\angle ETB = \angle EBT = \alpha$
Siga N el punt intersecció de la recta BR i el costat $\overline{CD}$
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}M, B\overset{\Delta}{C}N$ són iguals.
Aleshores N és el punt mig del costat $\overline{CD}$
Els triangles $D\overset{\Delta}{P}N, A\overset{\Delta}{P}B$ són semblants i de raó $1 : 2$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AP} = 2 \cdot \overline{CP}$
$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{CP} = 3 \cdot \overline{CP}$



4935.- La figura està formada per dos rectangles iguals.
Calculeu l’àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



FH=x, AE=JE=y

AB=a, AD=b

BE=y-a, JF=b-x

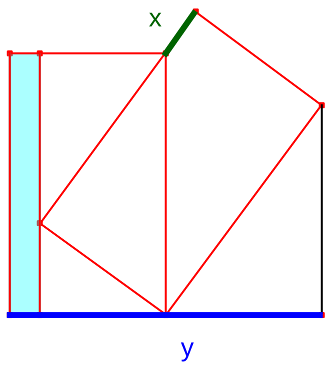
Els triangles JBE, EJF semblants

(y-a)/(b-x)=y/b

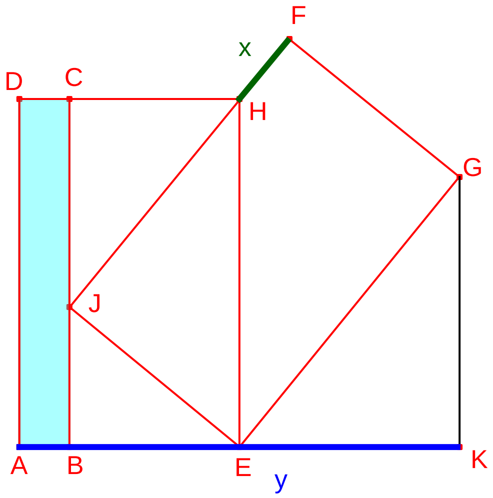
ab=xy

[ABCD]=ab=xy

4936.- La figura està formada per dos rectangles iguals.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



FH=x, AK=y

AE=EJ

AB=a, AD=b

Els triangles HJE, GKE són igual

AE=EK=y/2

BE=y/2-a, JF=b-x

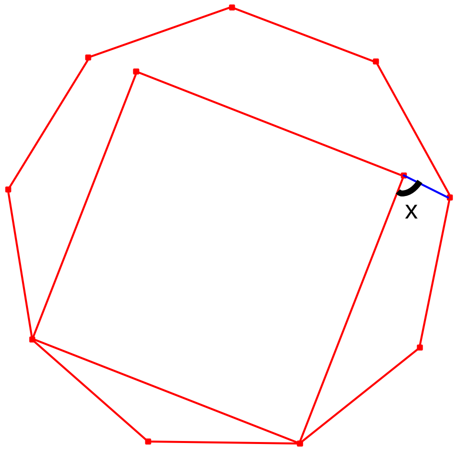
Els triangles JBE, EJF semblants

(y/2-a)/(b-x)=y/(2b)

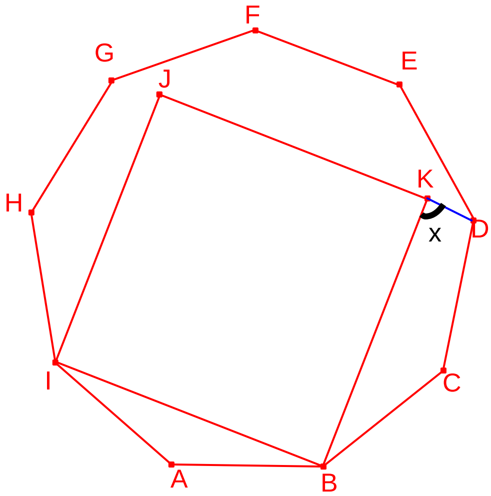
ab=xy/2

[ABCD]=ab=xy/2

4937.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:



BI=BK=BD

angleIAB=140º

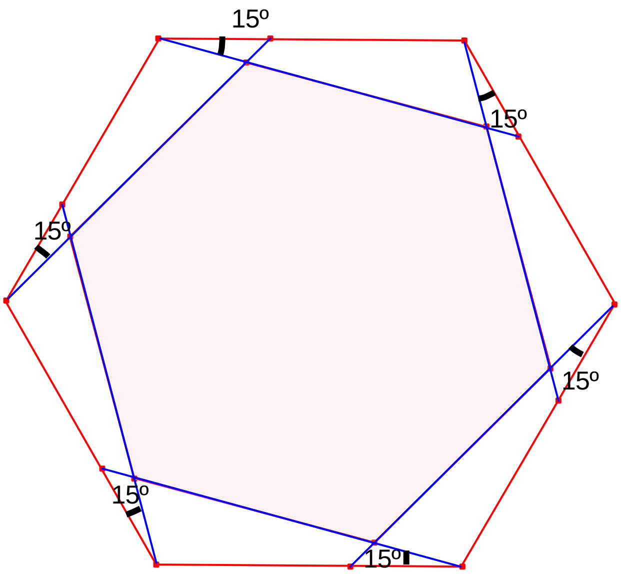
angleABI=angleAIB=20º

angleKBC=140º-(90º+20º)=30º

angleKBD=30º-20º=10º

x=angleBKD=anglBDK=85º

4938.- La figura està formada per dos hexàgons regulars.
Els angles marcats mesuren tots 15º.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons regulars.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $GHIJKL$ de costat $\overline{LG} = c$
Siga $\overline{MB} = \overline{AN} = x, \overline{NB} = y$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABN}$:

$$\frac{y}{\sin 120°} = \frac{x}{\sin 15°} = \frac{1}{\sin 45°}$$

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}, x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABN}, \overset{\Delta}{GBM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

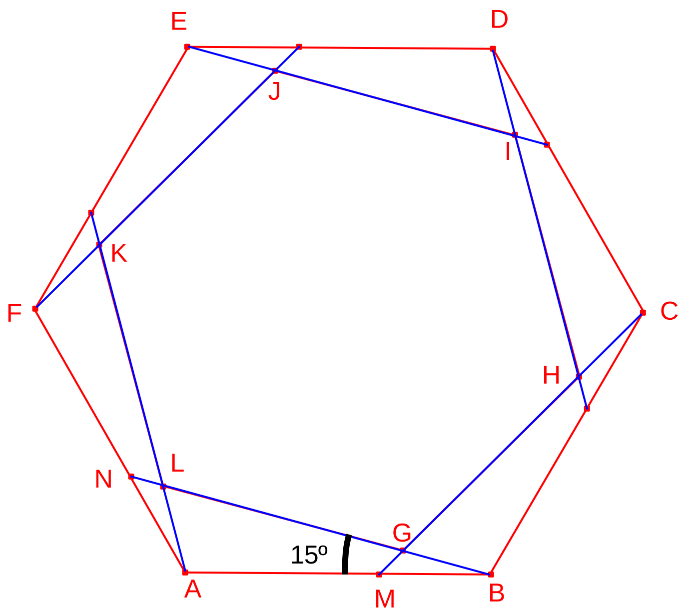
$$\frac{\overline{BG}}{1} = \frac{x}{y}, \frac{\overline{GM}}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\overline{BG} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \overline{GM} = \overline{NL} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$$

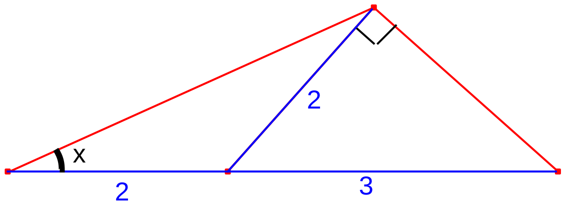
$$\overline{LG} = c = y - (\overline{BG} + \overline{NL}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

La proporció entre les àrees dels dos hexàgons regulars és:

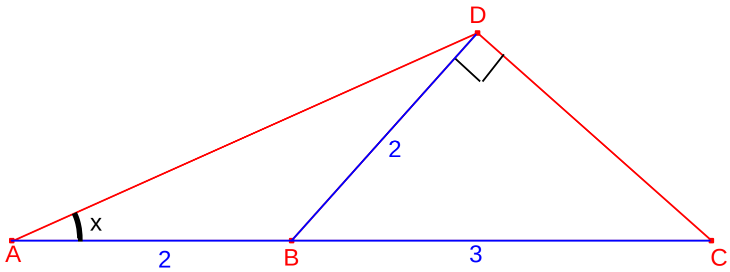
$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{c}{1}\right)^2 = \frac{2}{3}$$



4939.- En la figura calculeu:
$\sin x$



Solució:



angleDAB=angleBDA=x

CD=sqrt(5)

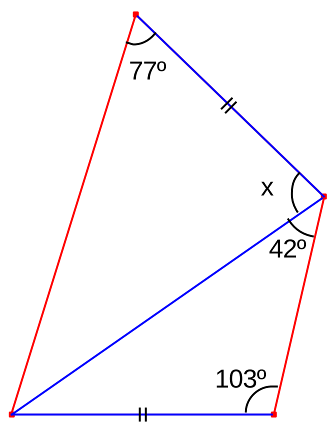
teorema sinus ACD

sqrt(5)/sin x = 5/cos x

tan x=sqrt(5)/5

sin x = 1/sqrt(6)

4940.- En la figura el quadrilàter té dos costats iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD, \overline{AB} = \overline{CD}, \angle ABC = 103°, \angle ADC = 77°, \angle ACB = 42°, \angle ACD = x$
Els angles oposats són suplementari.
Aleshores el quadrilàter $ABCD$ és inscriptible.
$\angle CAB = \angle BDC = 35°$

$\angle ADB = 77° - 35° = 42°$
$\angle DAC = 180° - (x - 77°) = 103° - x$

Els angles $\angle CAD, \angle ADB$ abracen el mateix arc.
$\angle CAD = \angle ADB$
$103° - x = 42°$
$x = 61°$