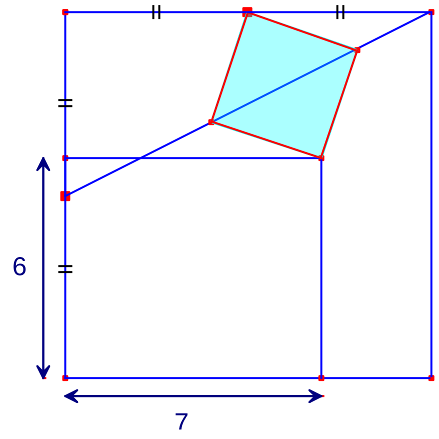
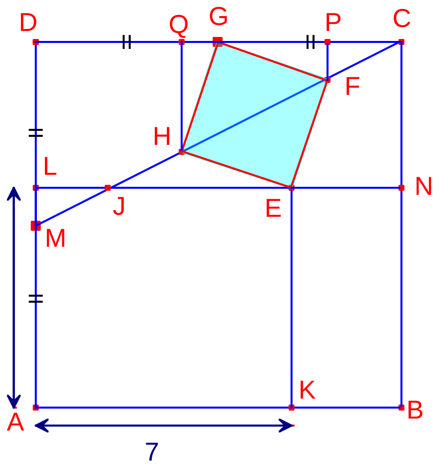
4941.- La figura està formada per un quadrat que conté un rectangle i un quadrat ombrejat.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



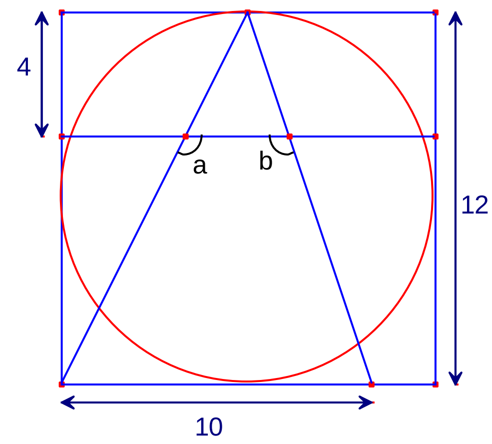
Solució:
Siga $\overline{DL} = a$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6 + a$
$\overline{CG} = \overline{JE} = \dfrac{6+a}{2}$
$\overline{KB} = \overline{EN} = a - 1$
$\overline{LM} = 6 - \dfrac{6+a}{2} = \dfrac{6-a}{2}$
$\overline{LJ} = 2 \cdot \overline{LM} = 6 - a$
$\overline{AB} = 6 + a = 6 - a + \dfrac{6+a}{2} + a - 1$
Resolent l'equació:
$a = 4$
$\overline{AB} = 10, \overline{CG} = 5$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GPF}, \overset{\Delta}{HQG}$ són iguals.
Siga $\overline{PF} = \overline{QG} = x, \overline{CP} = 2x$
$\overline{GP} = \overline{QH} = 5 - 2x$
$\dfrac{\overline{QH}}{\overline{CQ}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-2x}{x+5}$
Resolent l'equació:
$x = 1$
$\overline{GP} = 5 - 2 = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FPG}$:
$c^2 = 1 + 3^2 = 10$

4942.- La figura està formada per un quadrat de costat 12 que conté la circumferència inscrita. Calculeu la suma dels angles $a + b$



Solució:

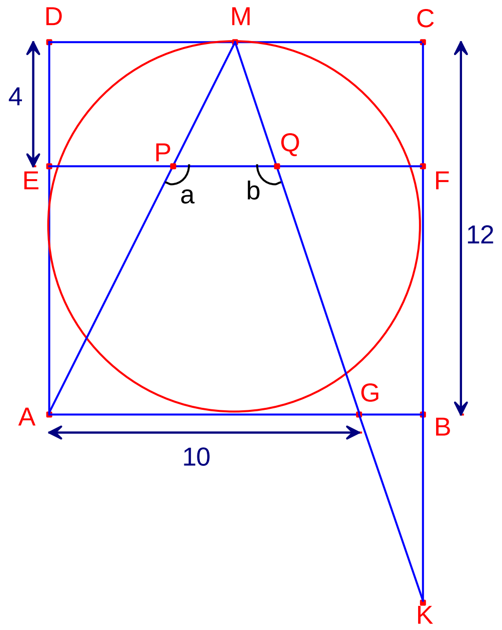
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 12$

$\overline{GB} = 2$

Siguen $c = \angle AMD, d = \angle GMC$

$a + c = 180°, b + d = 180°$

$a + b = 360° - (c + d)$



Les rectes MG, BC es tallen en el punt K

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MCK}, \overset{\Delta}{GBK}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{6}{2} = \frac{12 + \overline{BK}}{\overline{BK}}$$

Resolent l'equació:

$\overline{BK} = 6, \overline{CK} = 18$

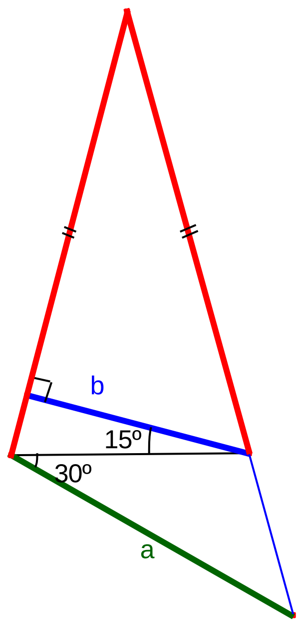
$\tan c = 2, \tan d = 3$

$$\tan(c + d) = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$

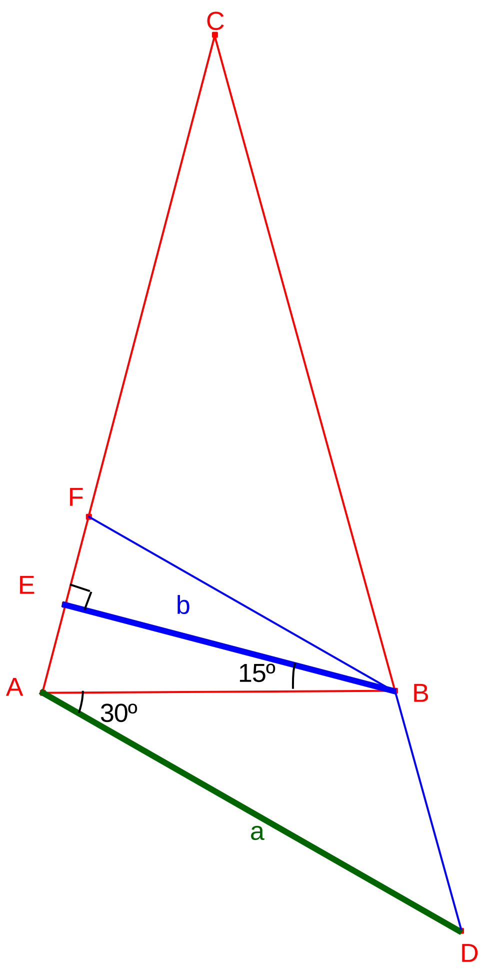
$c + d = 135°$

$a + b = 360° - (c + d) = 225°$

4943.- En la figura calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:



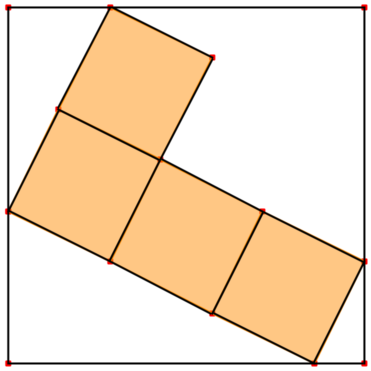
angleCAB=angleCBA=75º
angleACB=30º
angleABD=105º
angleADB=45º
angleCAD=105º

BC=2·BE=2b
CE=b·sqrt(3)
AB=BF=x

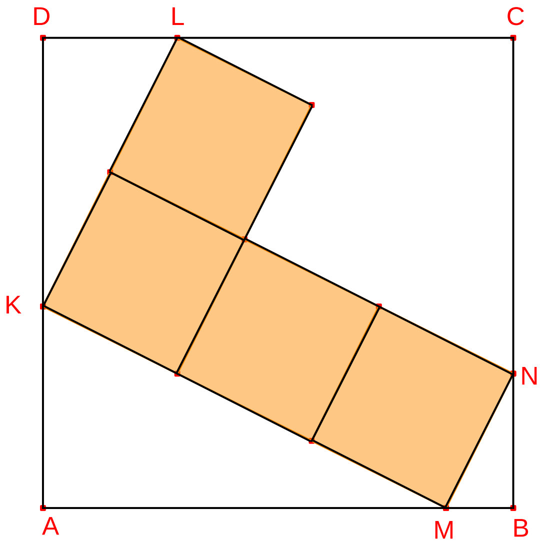
AE=(2-sqrt(3))·b
CF=2(sqrt(3)-1)·b
Teorema Pitàgores AEB
$x^2=4(2\text{-sqrt}(3))\cdot b^2$

Triangles ABD, CFB semblants
2b/a = 2(sqrt(3)-1)b/x
$1/a^2 = 2(2\text{-sqrt}(3))/x^2$
$2b^2=a^2$
a/b = sqrt(2)

4944.- La figura està formada per un quadrat que conté quatre quadrats.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quatre quadrats i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



MN=1

DK=a, AM=b, AB=c

Els triangles KDL, MAK, NBM semblants

b=(3/2)a

MB=c-b, AK=c-a

(c-a)/3=c-b

c=(7/4)a

Teorema Pitàgores MAK

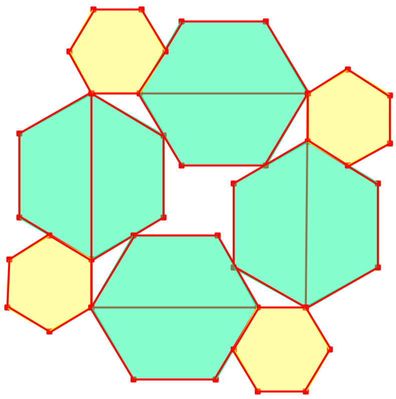
$3^2=(c-a)^2+b^2$

$9=c^2+(16/49)c^2-(8/7)c^2+(36/49)c^2$

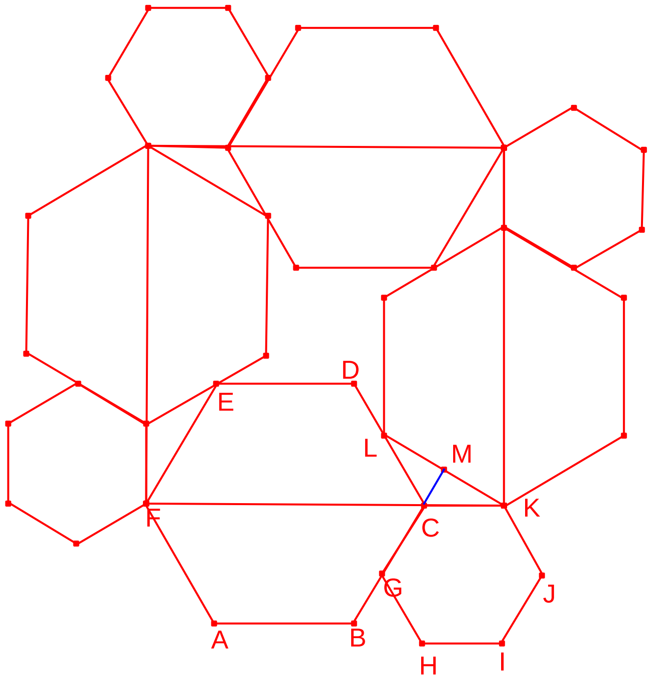
$c^2=49/5$

[Taronja]/[ABCD]=20/49

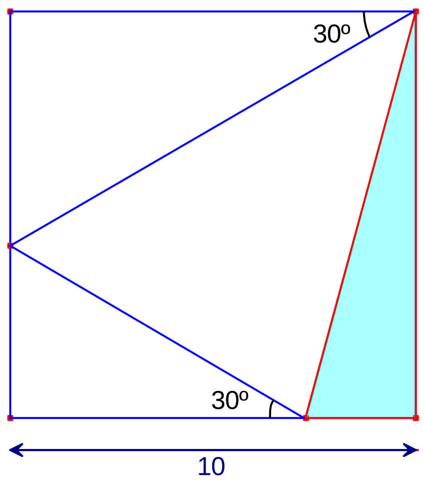
4945.- La figura està formada per un quadrat i vuit hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l’àrea verda i l’àrea groga.



Solució:
Siga l’hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga l’hexàgon regular $DGHIJK$ de costat $\overline{CG} = d$
$\angle CKL = 30°, \angle LCK = 120°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{LCK}$ és isòsceles
Siga M el punt mig del costat $\overline{LK} = c$
$\overline{KM} = \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}d$
La proporció d’àrees és:
$\frac{S_{verda}}{S_{groga}} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 3$



4946.- La figura està formada per un quadrant de costat 10
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$

$\overline{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 10$

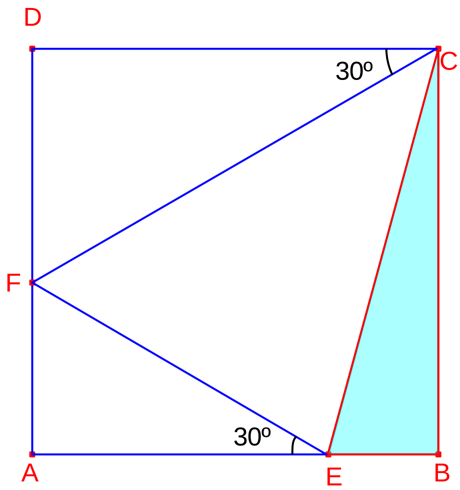
$\overline{AF} = 10\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\overline{AE} = \sqrt{3} \cdot 10\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 10(\sqrt{3} - 1)$

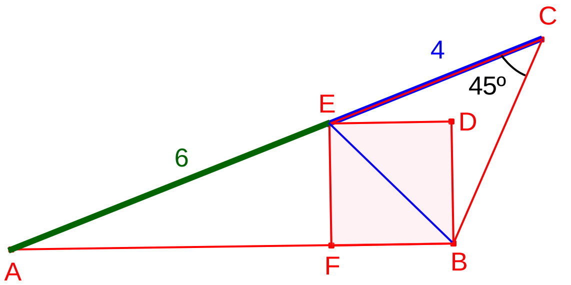
$\overline{BE} = 10 - 10(\sqrt{3} - 1) = 10(2 - \sqrt{3})$

L'àrea del triangle ombrejat és:

$S_{EBC} = \frac{1}{2} 10(2 - \sqrt{3}) \cdot 10 = 50(2 - \sqrt{3}) \approx 13.3975$



4947.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:

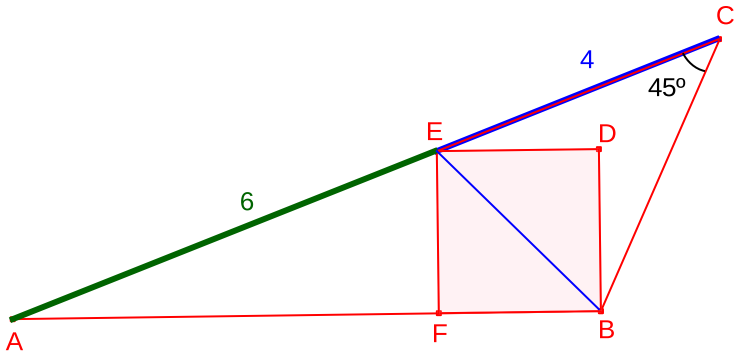
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 45°, \overline{AC} = 10$
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{BD} = c$
Siga $\overline{AB} = x, \overline{BC} = y$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AEB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{x} = \frac{y}{c\sqrt{2}}$$

Resolent el sistema:

$$x = 2\sqrt{15}, y = 5\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot c$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$60 = 100 + \frac{10}{3}c^2 - 2 \cdot 10 \cdot v5\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 - 2\sqrt{15}c + 12 = 0$$

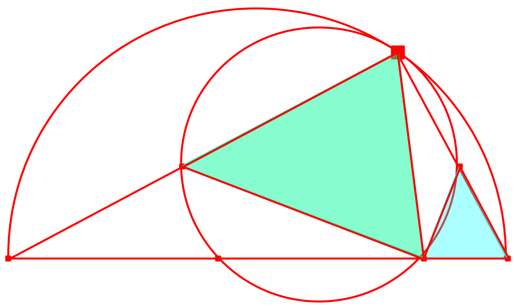
Resolent l'equació:

$$c = \sqrt{15} - \sqrt{3}$$

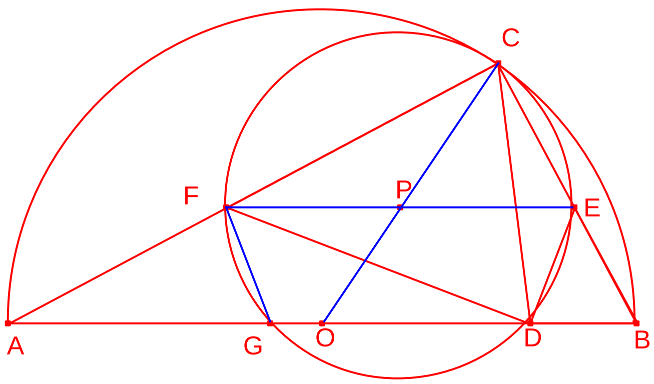
L'àrea del quadrat és:

$$S_{BDEF} = c^2 = 18 - 6\sqrt{5} \approx 4.5836$$

4948.- En la figura la semicircumferència i la circumferència són tangents.
Es mostra el punt de tangència.
Proveu que els dos triangles ombrejats són semblants.



Solució:



angleCFD=a
angleDE C=180º-a
angle DEB=a

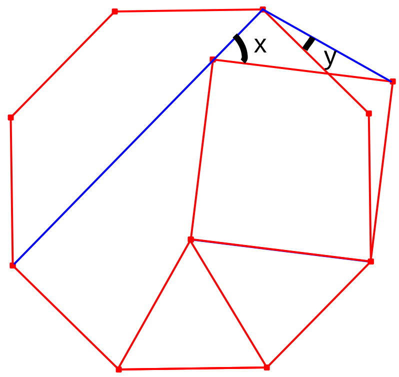
angleCFE=b
anglePCF=b, angleCAO=b
FE, AB paral·lels
GDEF trapezi isòsceles
angleFGD=180º-angleFCD

angleGDE=angleFGD

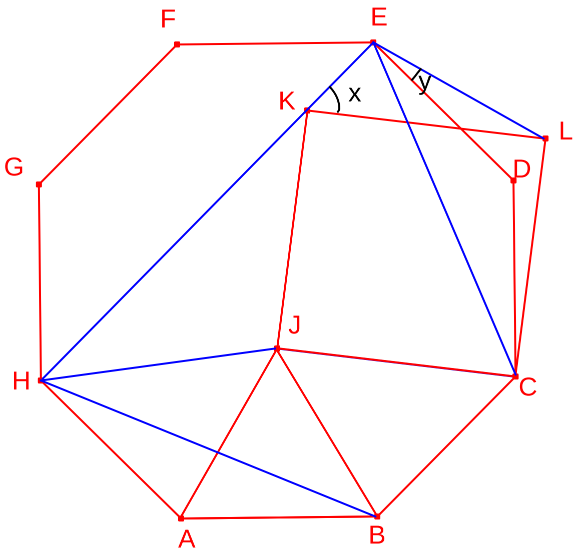
angleEDB=angleFCD

Els triangles FCD, EDB tenen els angles iguals

4949.- La figura està formada per un octògon regular, un quadrat i un triangle equilàter. Calculeu la mesura dels angles x, y



Solució:



angleJBL=135º-60º=75º

angleBJC=angleHJA=105º/2

angleHJK=105º

angleHKJ=75º/2

x=90º-75º/2=105º/2

angleBCL=75º/2+90º

angleECL=30º

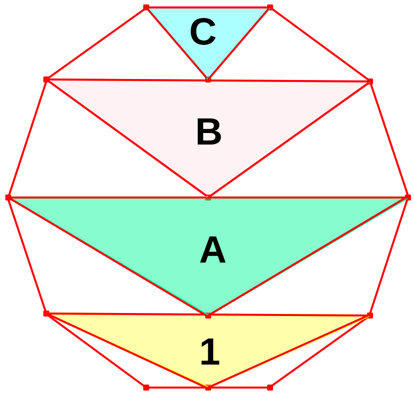
angleBHJ=30º

Els triangles CLE, HAB són iguals

angleCEL=anglHBJ=60º-45º/2=75º/2

y=75º/2-45º/2=15º

4950.- La figura està formada per un decàgon regular. Calculeu l'àrea dels triangles ombrejats si el triangle inferior groc té àrea 1.



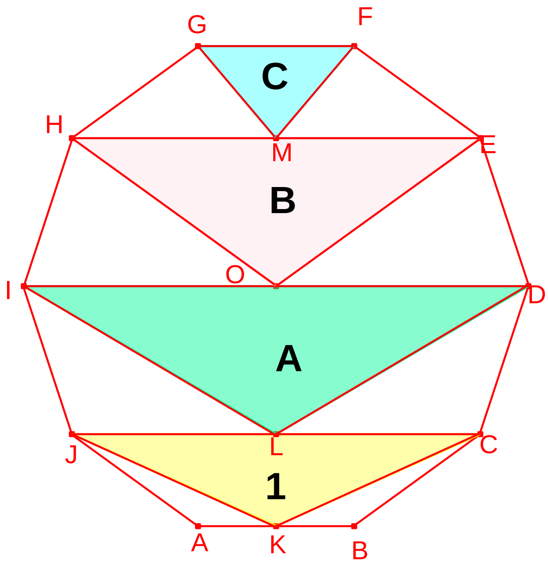
Solució:
Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen $\overline{JC} = \overline{HE} = d, \overline{ID} = e$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACJ}$

$$\frac{d}{\sin 126°} = \frac{c}{\sin 18°}$$

$$d = \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c$$

$$e = \frac{c}{\sin 18°}$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KCJ}$ és 1:

$$1 = S_{KCJ} = S_{ACJ} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c \cdot \sin 36° = \frac{1}{4} \frac{\sin 72°}{\sin 18°} c^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LDI}$ és:

$$A = S_{LDI} = S_{JDI} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{c}{\sin 18°} \cdot \sin 72° = 2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OEH}$ és:

$$B = S_{OEH} = S_{IEH} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c \cdot \sin 108° = \frac{1}{4} \frac{\sin 72°}{\sin 18°} \cdot 2 \cos 36° = \Phi$$

Els triangles $\overset{\Delta}{MFG}, \overset{\Delta}{KCJ}$ tenen la mateixa altura és àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{MFG}}{1} = \frac{c}{d} = \frac{c}{\frac{\sin 54°}{\sin 18°} c} = \frac{\sin 18°}{\sin 54°} = \frac{\frac{1}{2\Phi}}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{1}{\Phi^2}$$