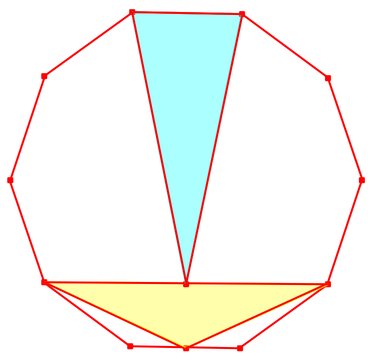
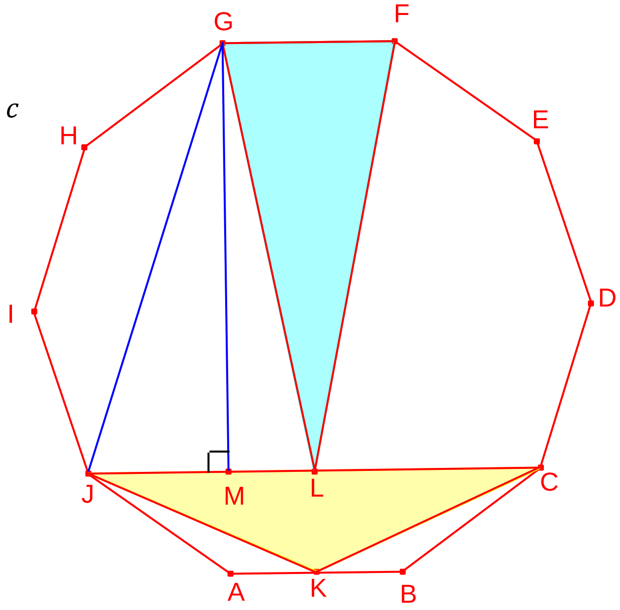
4951.- La figura està formada per un decàgon regular. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle blau i l'àrea del triangle groc.



Solució:

Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen $\overline{JC} = \overline{Jg} = d$,



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACJ}$

$$\frac{d}{\sin 126°} = \frac{c}{\sin 18°}$$

$$d = \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KCJ}$ és:

$$S_{KCJ} = S_{ACJ} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c \cdot \sin 36° = \frac{1}{4} \frac{\sin 72°}{\sin 18°} c^2$$

$\angle GJM = 72°$

Siga $k = \overline{GM}$

$$k = d \cdot \sin 72° = \frac{\sin 72 \cdot \sin 54°}{\sin 18°} c$$

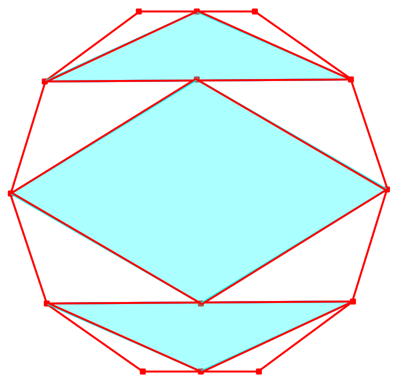
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FGL}$ és:

$$S_{FGL} = \frac{1}{2} ck = \frac{1}{2} \frac{\sin 72 \cdot \sin 54°}{\sin 18°} c^2 = \frac{1}{4} \frac{\sin 72°}{\sin 18°} c^2 \cdot 2 \cdot \cos 36° = S_{KCL} \cdot 2 \cdot \cos 36°$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{FGL}}{S_{KCL}} = 2 \cdot \cos 36° = \Phi$$

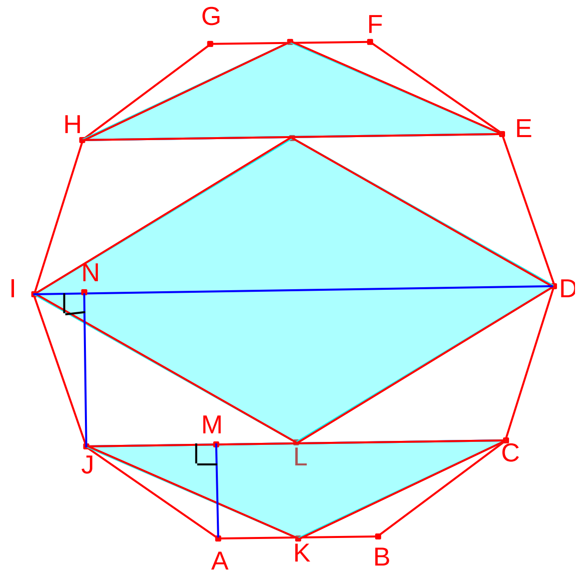
4952.- La figura està formada per un decàgon regular. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del decàgon.



Solució:

Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen $\overline{JC} = \overline{HE} = d, \overline{ID} = e$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACJ}$

$$\frac{d}{\sin 126°} = \frac{c}{\sin 18°}$$

$$d = \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c$$

$$e = \frac{c}{\sin 18°}$$

Siguen $h = \overline{AM}, k = \overline{JN}$

$h = c \cdot \sin 36°, k = c \cdot \cos 72°$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KCJ}$:

$$S_{KCJ} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sin 54°}{\sin 18°} c \cdot \sin 36° = \frac{1}{4} \frac{\sin 72°}{\sin 18°} c^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LDI}$ és:

$$S_{LDI} = S_{JDI} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{c}{\sin 18°} \cdot \sin 72° = 2$$

L'àrea blava és:

$$S_{blava} = 2\left(S_{KCJ} + S_{LDI}\right) = 6 \cdot S_{KCJ}$$

L'àrea del decàgon regular és:

$$S_{ABCDEFGHIJ} = 2\left(S_{ABCJ} + S_{JCDI}\right) = 2\left(\frac{c+d}{2} \cdot c \cdot \sin 36° + \frac{d+e}{2} \cdot c \cdot \sin 72°\right) =$$

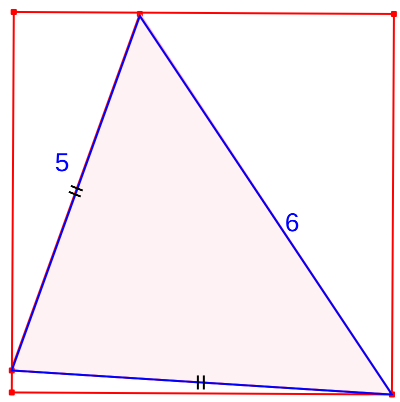
$$= \left(\left(1 + \frac{\sin 54°}{\sin 18°}\right) \cdot \sin 36° + \left(\frac{1}{\sin 18°} + \frac{\sin 54°}{\sin 18°}\right) \cdot \sin 36°\right) c^2 =$$

$$= \frac{\sin 72°}{\sin 18°} \cdot 2 \cdot (\sin^2 36° + \cos^2 18°) = \frac{\sin 72°}{\sin 18°} \cdot \frac{5}{2} = 10 \cdot S_{KCJ}$$

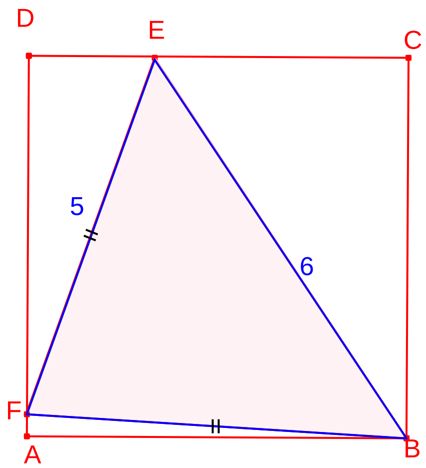
la proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{blava}}{S_{ABCDEFGHIJ}} = \frac{6 \cdot S_{KCJ}}{10 \cdot S_{KCJ}} = \frac{3}{5}$$

4953.- La figura està formada per un quadrat que conté un triangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del quadrats.



Solució:



AB=BC=c
AF=a, CE=b

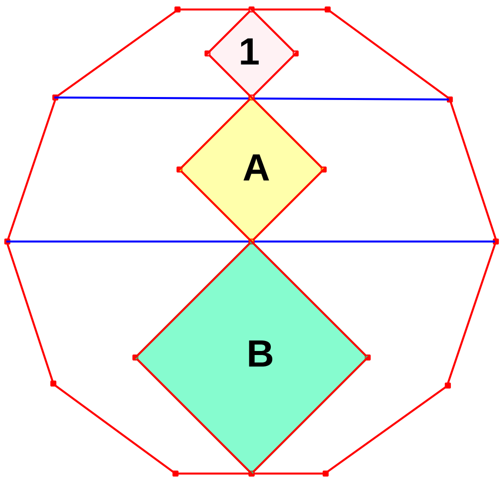
Teorema Pitàgores FDE, BAF
$a^2+c^2=(c-a)^2+(c-b)^2$
Teorema Pitàgores ACE
$b^2+c^2=36$

[BEF]=12
[ABCD]=c^2=(1/2)(c-a)+(1/2)(bc+ac)+12

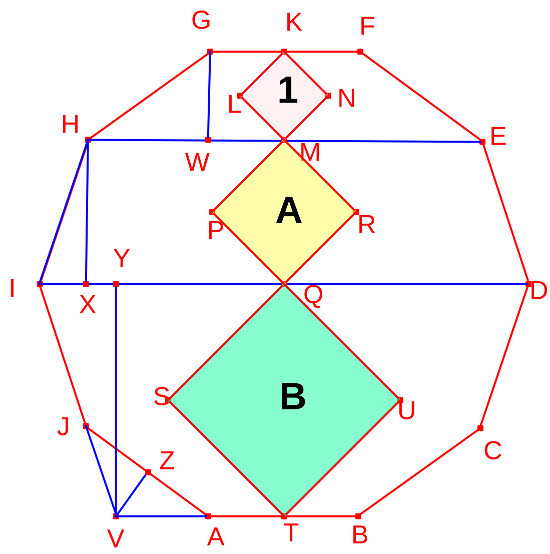
c^2=ab+24

c^2=314/13
[BEF]/[ABCD]=13/27

4954.- La figura està formada per un decàgon regular amb dues diagonals.
S'han dibuixat tres costats amb els vèrtexs en els punts migs de la diagonal i els punts migs dels costats oposats.
Si el quadrat menut té àrea 1, calculeu l'àrea dels quadrats A, B



Solució:



Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $x = \overline{GW} = c \cdot \sin 36°$
Siga $y = \overline{HX} = c \cdot \sin 72°$
Siga $t = \overline{JV} = \frac{c}{2 \cdot \cos 36°}$
Siga $z = \overline{VY} = \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \cos 36°}\right) c \cdot \sin 72°$

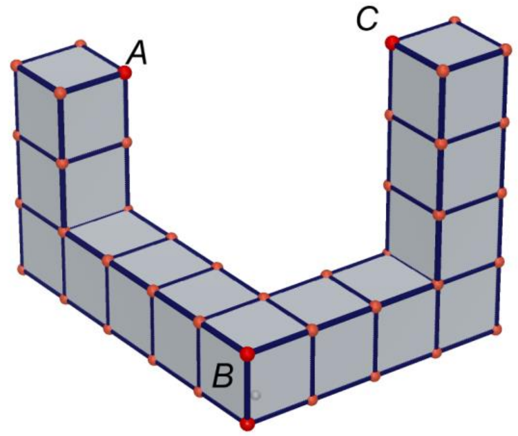
$$\frac{A}{1} = \left(\frac{y}{c}\right)^2 = \left(\frac{\sin 72°}{\sin 36°}\right)^2 = 4 \cdot \cos^2 36° = \Phi^2$$

$$\frac{B}{1} = \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{2 \cdot \cos 36°}\right) \sin 72°}{\sin 36°}\right)^2 = (1 + 2 \cdot \cos 36°)^2 = (1 + \Phi)^2 = \Phi^4$$

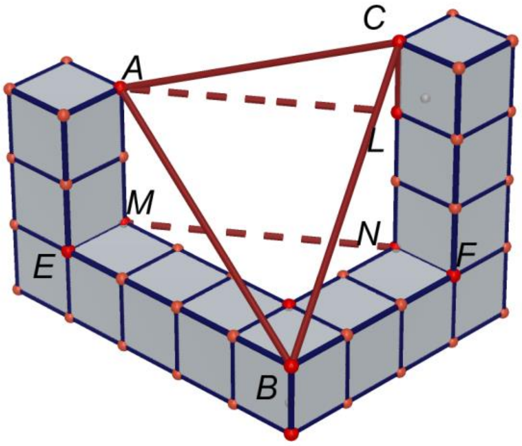
4955.- La figura està formada per cubs adossats d’aresta 1.

Calculeu la mesura dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

KöMaL, C1718



Solució:



$\overline{AE} = \sqrt{5}, \overline{BE} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$

$\overline{AB} = \sqrt{21}$

$\overline{CF} = \sqrt{10}, \overline{BF} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFC}$

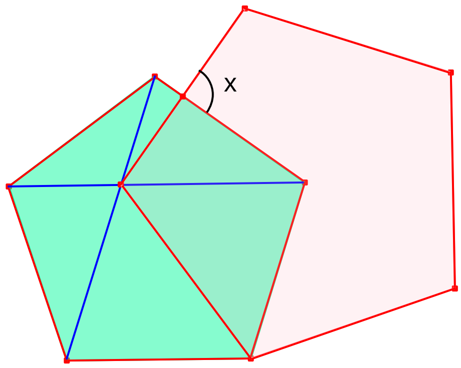
$\overline{BC} = \sqrt{19}$

$\overline{AL} = \overline{MN} = \sqrt{13}, \overline{CL} = 1$

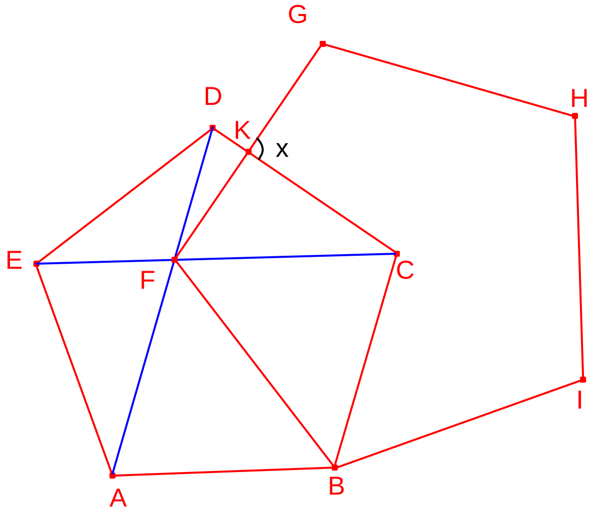
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALC}$

$\overline{AC} = \sqrt{14}$

4956.- La figura està formada per dos pentàgons regulars i dues diagonals. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



CF=CD=BC

angleFCB=72º

angleFCD=36º

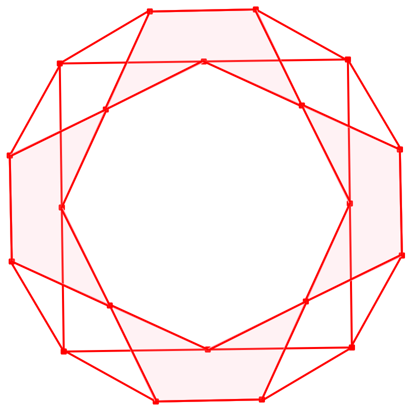
angleCFB=angleFBC=54º

angleGFC=108º-54º=54º

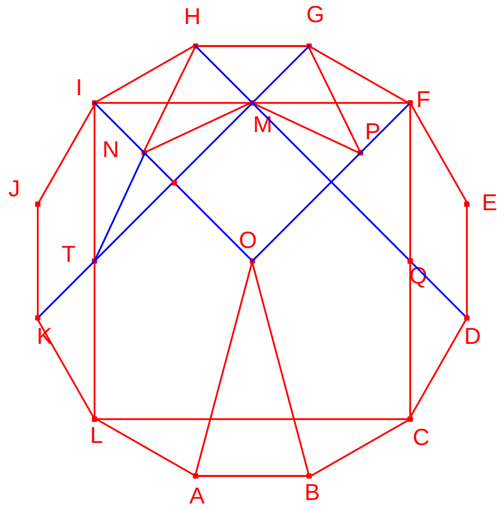
x=angleGKC=54º+36º=90º

Nota: C és el centre del pentàgon regular BFGHI

4957.- La figura està formada per un dodecàgon regular i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del dodecàgon regular.



Solució:



H, M, Q, D alineats

G, M, T, K alineats

angleTMH=90º

N pertany a la mediatriu TM

MN=TN

MN=NH

OA=R, AB=c

c=(sqrt(6)-sqrt(2))/2·R

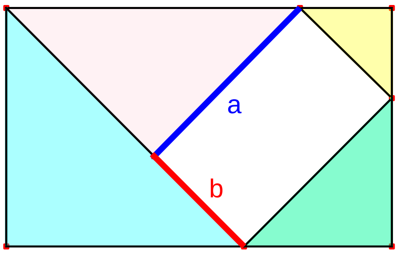
$[NMPGH]=[TMH]+[MGH]=(1/4)\text{sqrt}(2)\cdot R\cdot c+(1/4)c^2$

$[NMPGH]=(1/4)R^2$

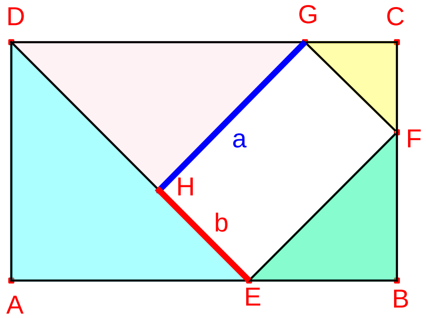
$[IOFGH]=3\cdot[ABO]=(3/4)R^2$

[NMPGH]/[IOFGH]=1/3

4958.- En la figura els quatre triangles ombrejats són semblants i els dos rectangles són semblants.
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:
Siguen els rectangles semblants $ABCD, EFGH$
Siga $\overline{DH} = ka$
$\overline{DG} = a\sqrt{1+k^2}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DHG}, \overset{\Delta}{FBE}, \overset{\Delta}{GCF}, \overset{\Delta}{ADF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BE} = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \overline{BE} = \frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\overline{CF} = \frac{b}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \overline{CG} = \frac{bk}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\overline{BC} = \frac{ka+b}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{ka+b}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \overline{DE} = k \cdot \overline{AD} = \frac{k(ka+b)}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\frac{k(ka+b)}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{ak}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{a(1+k^2)}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{bk}{\sqrt{1+k^2}}$$

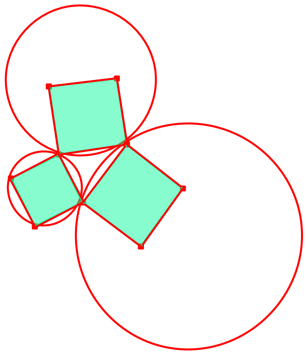
Simplificant:
$k = 1$
Els rectangles semblants $ABCD, EFGH$:

$$\frac{\frac{k(ka+b)}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}}{\frac{b+ak}{\sqrt{1+k^2}}} = \frac{a}{b}$$

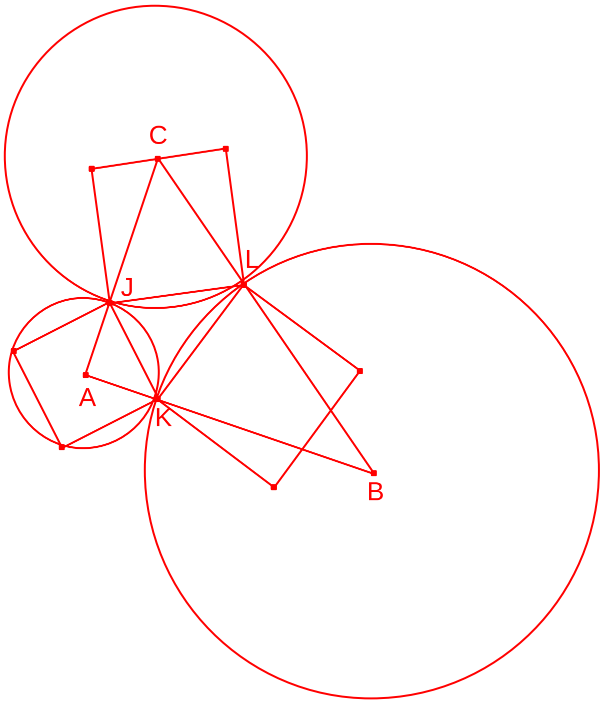
Simplificant:
$a^2 - ab - b^2 = 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

4959.- La figura està formada per tres circumferències tangents de radis 1, 2, 3.
Calculeu la suma de les àrees dels tres quadrats ombrejats.



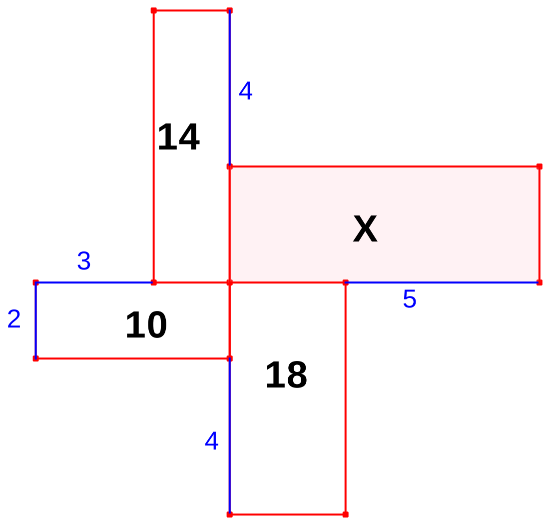
Solució:
Siguen A, B, C els centres de les tres circumferències de radis 1, 3, 2, respectivament.



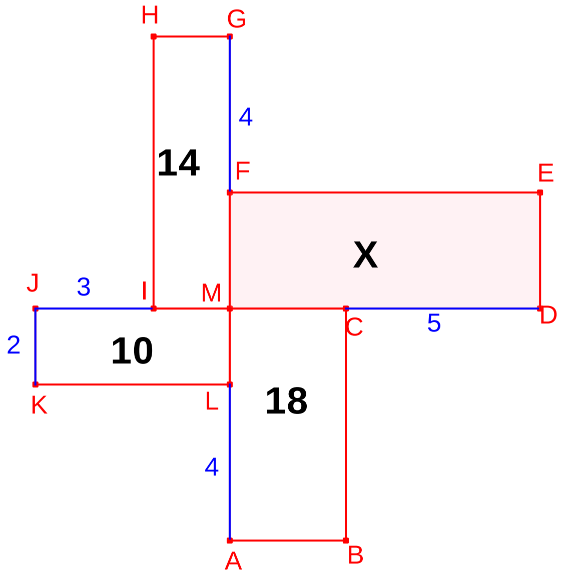
$\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 5$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:
$A = 90°$

$\overline{LK} = \sqrt{2}$
Siga $\alpha = \angle ACB$
$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos(90° - \alpha) = \dfrac{4}{5}$
Siguen $x = \overline{JL}, y = \overline{KL}$
Aplicant el teorema dels cosinus als triangles $\overset{\Delta}{JLC}, \overset{\Delta}{KLB}$:
$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{16}{5}$
$y^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{18}{5}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = LK^2 + x^2 + y^2 = \dfrac{44}{5}$

4960.- La figura està formada per quatre rectangles tres d'ells d'àrees 10, 18, 14. Calculeu l'àrea X del quart rectangle.



Solució:



KL=5

IM=2

IH=7

AM=4+2=6

AB=3

MD=5+3=8

MF=7-4=3

X=[MDEF]=8·3=24