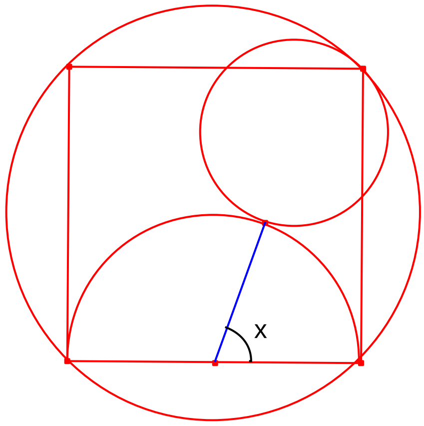
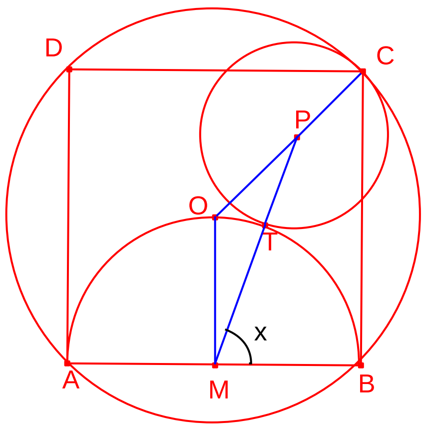
4961.- La figura està formada per dues circumferències tangents interiors, un quadrat i una semicircumferència.
Calculeu:
$\cos x$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PT} = r$
$\angle MOP = 135°, \overline{OM} = 1, \overline{MT} = 1 + r, \overline{OP} = \sqrt{2} - x$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MOP}$:

$$(1 + r)^2 = 1 + \left(\sqrt{2} - r\right)^2 + \left(\sqrt{2} - r\right)\sqrt{2}$$

$$r = \frac{4}{2 + 3\sqrt{2}}$$

$$\angle OMP = 90° - x$$

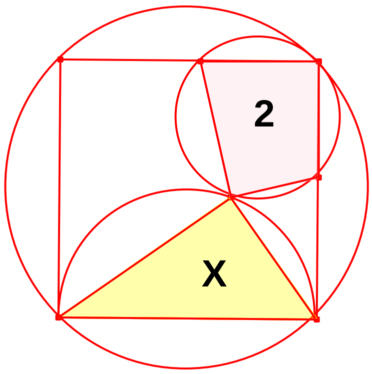
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MOP}$:

$$\left(\sqrt{2} - r\right)^2 = 1 + (1 + r)^2 - 2(1 + r)\cos(90° - x)$$

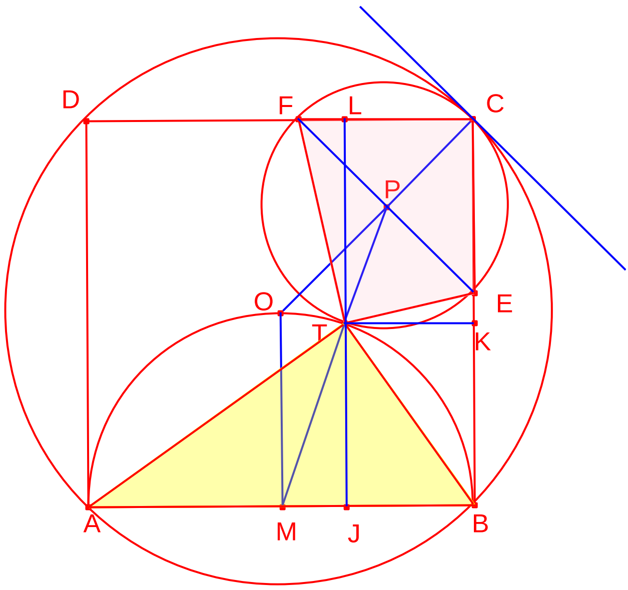
$$\cos(90° - x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{3}$$

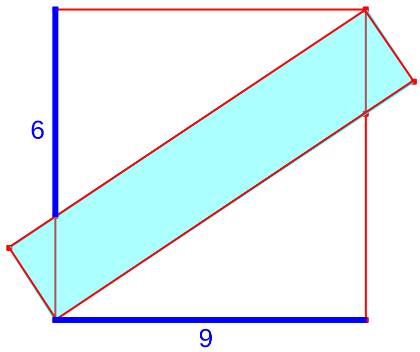
4962.- La figura està formada per dues circumferències tangents interiors, un quadrat i una semicircumferència.
Si l'àrea del quadrilàter ombrejat és 2, calculeu l'àrea X del triangle ombrejat.



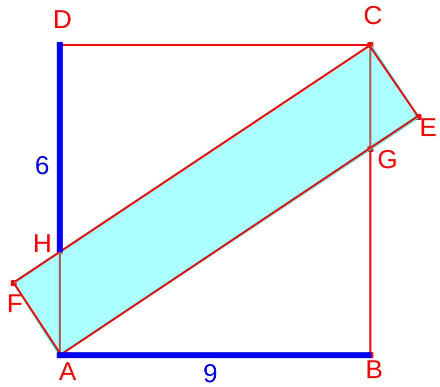
Solució:
Pel problema anterior $\overline{MJ} : \overline{MT} = 1 : 3$
Siguen $\overline{MJ} = k, \overline{MT} = \overline{MA} = 3k$
$\overline{TK} = 2k, \overline{TJ} = 2k\sqrt{2}, \overline{TL} = 6k - 2k\sqrt{2}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PT} = r$
$\overline{CF} = \overline{CE} = r\sqrt{2}$
Pel problema anterior:
$$r = \frac{4}{3\sqrt{2}+2} \cdot 3k$$
L'àrea del quadrilàter $TECF$ és 2:
$$S_{TECF} = S_{CFT} + S_{CET} = \frac{1}{2}(8 - 2\sqrt{2})\sqrt{2}kr = 2$$
$$(\sqrt{2}-1)kr = 1$$
$$(\sqrt{2}-1)\frac{12}{3\sqrt{2}+2}k^2 = 1$$
$$k^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{12}$$
L'àrea groga és:
$$S_{ABT} = \frac{1}{2}6k \cdot 2\sqrt{2}k = 6\sqrt{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{12} = 1 + \sqrt{2}$$



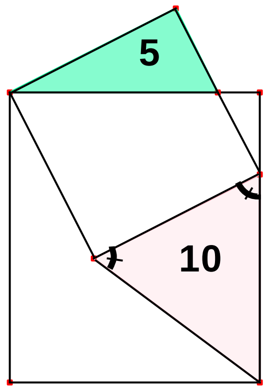
4963.- La figura està formada per un quadrat de costat 9 i un rectangle.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



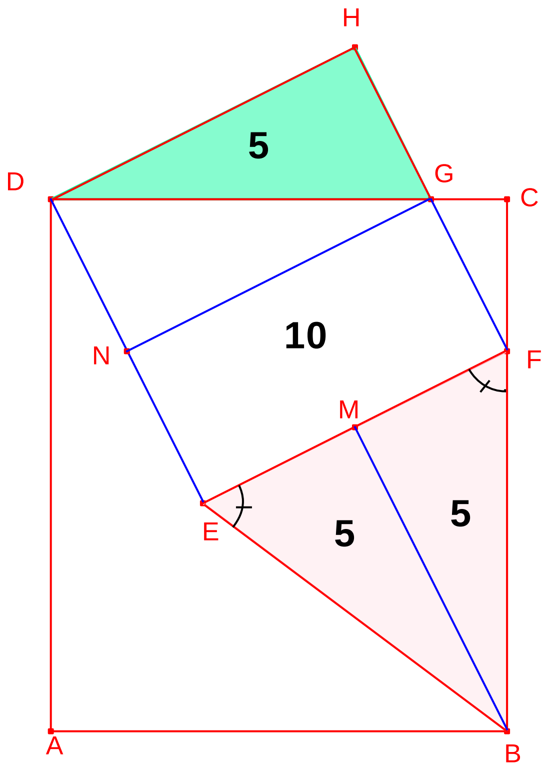
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 9$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HDC}$:
$\overline{CH} = 3\sqrt{13}$
Siguen $\overline{AF} = a, \overline{FH} = b$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HDC}, \overset{\Delta}{HFA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$a = \frac{9}{\sqrt{13}}, b = \frac{6}{\sqrt{13}}$
L'àrea del rectangle $AECF$ és:
$S_{AECF} = (b + 3\sqrt{13})a = \left(\frac{6}{\sqrt{13}} + 3\sqrt{13}\right)\frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{405}{13}$



4964.- La figura està formada per un quadrat i un rectangle que comparteixen un vèrtex.
Es donen dues àrees triangulars. Quina és la superfície total?



Solució:



[BMF]=5

Els triangles BMF, DHG iguals

HG=(1/2)EF

[EFHD]=20

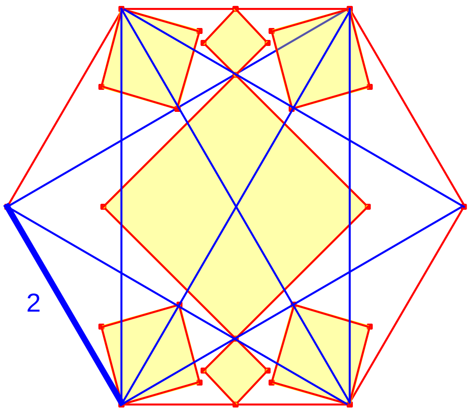
DG=5

CG=1, CF=2

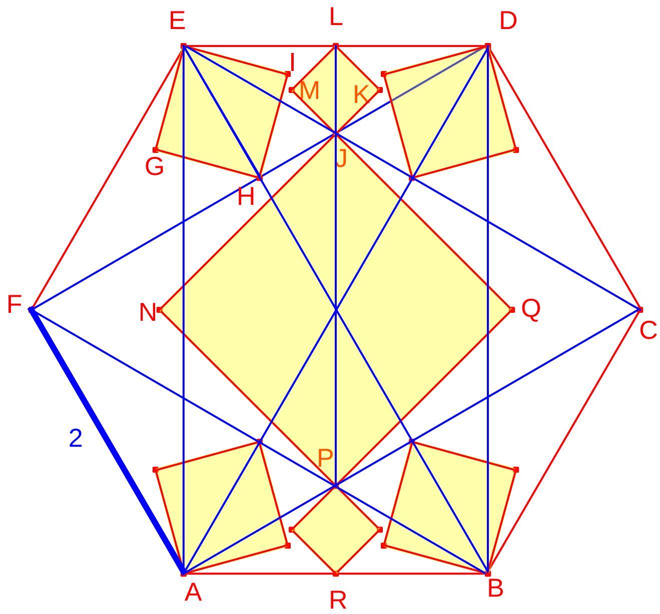
AB=6, BC=7

[ABCGHD]=6·7+5=47

4965.- La figura està formada per un hexàgon regular que conté set quadrats. Calculeu la suma de les àrees dels set quadrats ombrejats.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$

Siga el quadrat $EGHI$.

$\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{FE} = 1$

Siga el quadrat $JKLM$.

$\overline{LJ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{EL} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Siga el quadrat $JNPQ$.

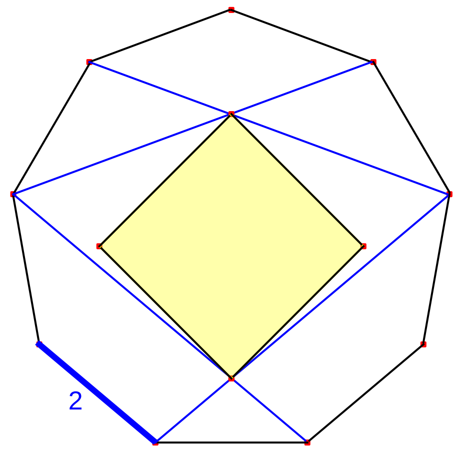
$\overline{JP} = \overline{LR} - 2 \cdot \overline{LJ} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

L'àrea ombrejada és:

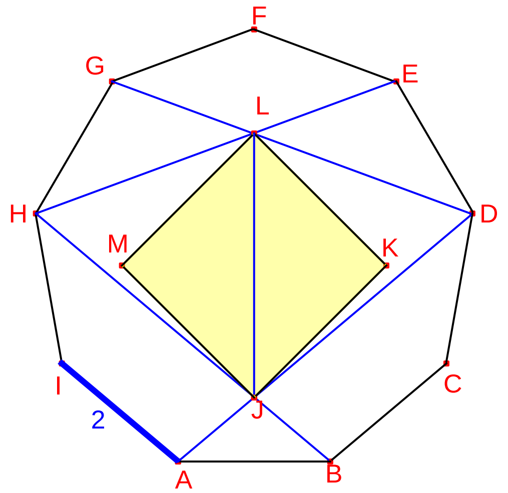
$$S_{ombrejada} = 4 \cdot S_{EGHI} + 2 \cdot S_{JKLM} + S_{JNPQ} = 4 \cdot \frac{1}{2}\overline{EH}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\overline{LJ}^2 + \frac{1}{2}\overline{JP}^2 =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 5$$

4966.- La figura està formada per un polígon regular de nou costat i de costat 2.
Calculeu l'àrea quadrat interior.

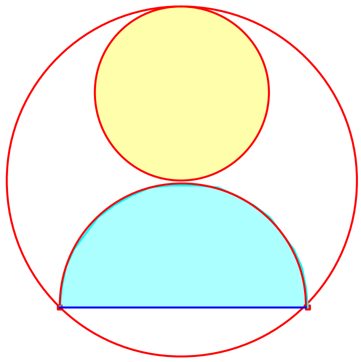


Solució:
Siga el polígon regular $ABCDEFGHI$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrat $JKLM$ de diagonal $\overline{JL} = d$
$\angle ADG = 60°, \angle HJD = 100°, \angle HLD = 140°$
$\angle HJD = 100°, \angle HLD = 140°$
$\angle HJD = 100°, \angle HLD = 140°$
$\angle JLK = 70°, \angle LJK = 50°$

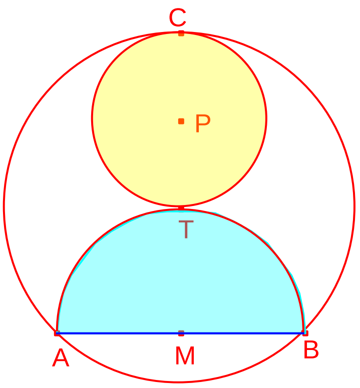


Siguen $\overline{DL} = x$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{LDE}$:
$$\frac{x}{\sin 80°} = \frac{2}{\sin 40°}$$
$$x = 4 \cdot \cos 40°$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{LJD}$:
$$\frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\sin 50°}$$
$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4 \cdot \cos 40°}{\cos 40°} = 2\sqrt{3}$$
L'àrea del quadrat $JKLM$ és:
$$S_{JKLM} = \frac{1}{2} d^2 = 6$$

4967.- La figura està formada per una circumferència que conté una circumferència i una semicircumferència.
La circumferència groga té la mateixa àrea que la semicircumferència blava.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



PC=PT=s

MT=AM=r

$s^2=(1/2)r^2$

2s=TC=r·sqrt(2)

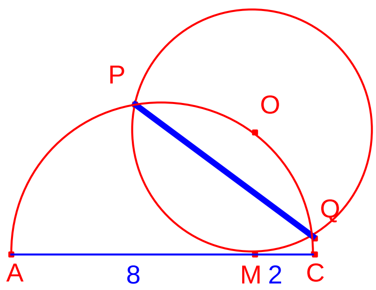
AT=TC=TB=r·sqrt(2)

T centre circumf. exterior, radi AT

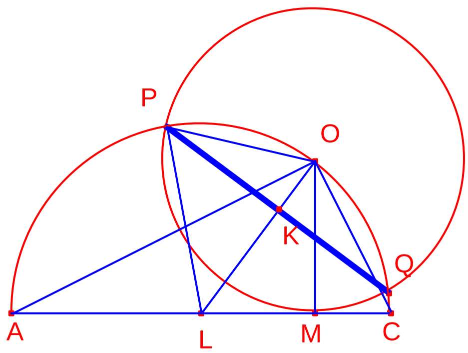
Proporció:

$2\cdot(1/2)r^2/(\mathrm{sqrt}(2)\cdot r)^2=1/2$

4968.- La figura està formada per una semicircumferència i una circumferència tangent al diàmetre.
El punt de tangència M divideix el diàmetre en dos segments de longituds 8, 2.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$



Solució:



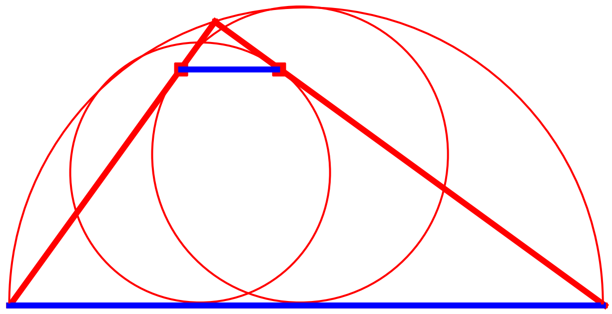
AL=LC=LO=LP=5
OM=r
OK=a, PK=QK=b

angleAOC=90º
Teorema Altura
$r^2=8\cdot 2=16$
r=4

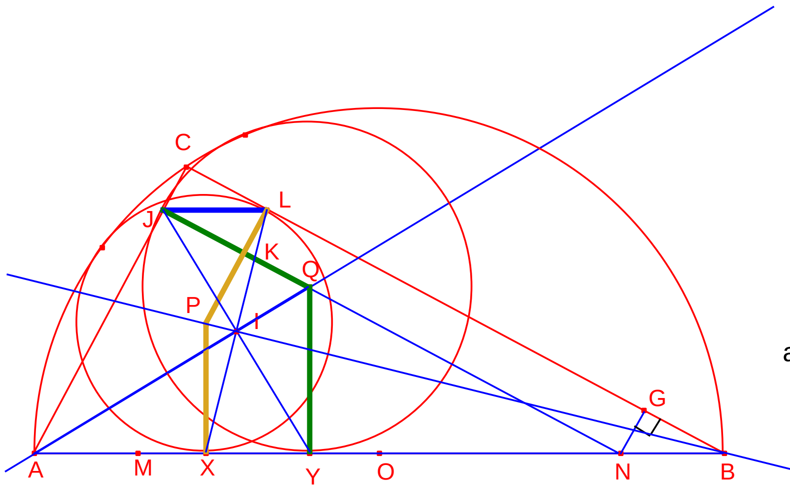
Teorema Pitàgores LKP, OKP
$25-(5-a)^2=16-a^2$
a=8/5
b=(4/5)sqrt(21)

PQ=2b=(8/5)sqrt(21)

4969.- La figura està formada per una semicircumferència amb un triangles inscrit. Les dues circumferències són tangents al semicercle, el diàmetre i un altre costat del triangle.
Demostreu que el segment que uneix els dos punts de tangència és paral·lel al diàmetre



Solució:



PL BC perpendiculars

angleACB=90º

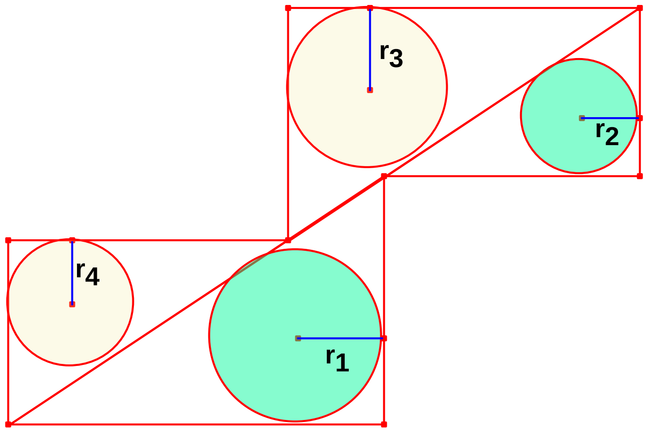
JQ, AC perpendiculars
CJKL rectangle

I incentre ABC
angleYQJ=180º-A, QY=QJ
angleJYQ=A/2
angleJYX=90º-A/2

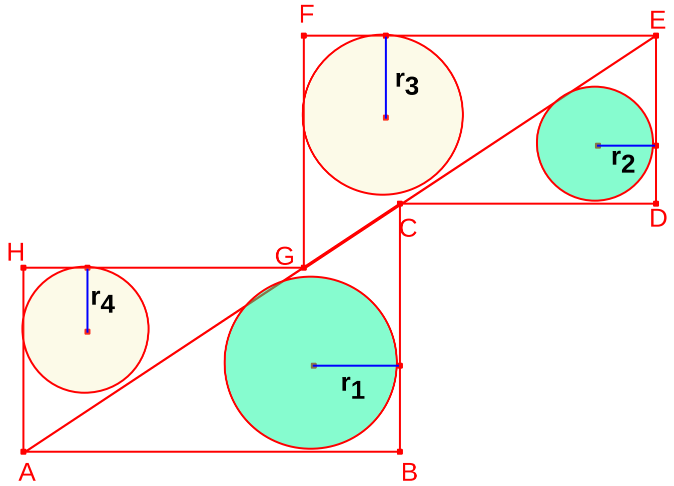
angleLPX=180º-B, PL=PX
anglePXL=B/2
angleAQY=90º-B/2
angleQIY=90º
I pertany YJ
I pertany XL
JI=YI, LI=XI

Els triangles XYI, JLI iguals
JL, AB paral·lels

4970.- En la figura proveu la següent igualtat:
$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$



Solució:



Siguen $\overline{BC} = a, \overline{DE} = b, \overline{FG} = c, \overline{AH} = d$
$a + b = c + d$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{GHA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} = \frac{r_3}{c} = \frac{r_4}{d}$$
$$\frac{r_1 + r_2}{a + b} = \frac{r_3 + r_4}{c + d}$$

$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$