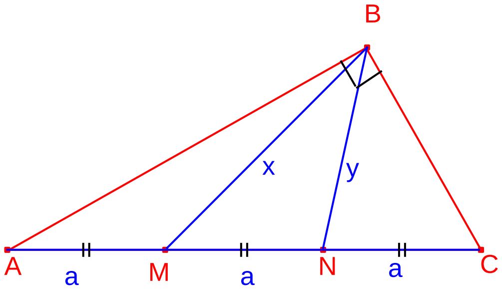
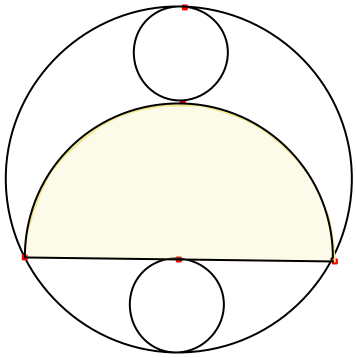
4971.- En la figura, la hipotenusa d'un triangle rectangle està dividida en tres parts iguals de longitud a.
Calculeu x^2+y^2



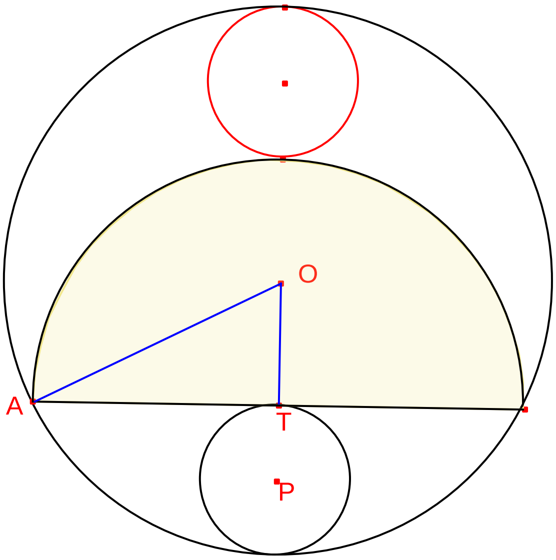
Solució:
Siguen $\overline{AB}=m, \overline{BC}=n$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$m^2+n^2=9a^2$

Aplicant la propietat de la mitjana al triangle $\overset{\Delta}{MCB}$:
$$y^2=\frac{2n^2+2x^2-4a^2}{4}$$
Aplicant la propietat de la mitjana al triangle $\overset{\Delta}{ANB}$:
$$x^2=\frac{2m^2+2y^2-4a^2}{4}$$
Sumant ambdues expressions:
$$x^2+y^2=\frac{2m^2+2n^2+2x^2+2y^2-8a^2}{4}$$
$$4(x^2+y^2)=2(m^2+n^2)+2(x^2+y^2)-8a^2$$
$$2(x^2+y^2)=10a^2$$
$$x^2+y^2=5a^2$$

4972.- En la figura els cercles menuts són iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



AT=r, PT=s

OA=(4s+r)/2

OT=r/2

Teorema Pitàgores ATO

$((4s+r)/2)^2=r^2+r^2/4$

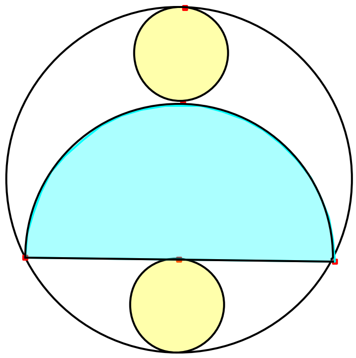
s/r = (-1+sqrt(5))/4

4r+s=sqrt(5)·r

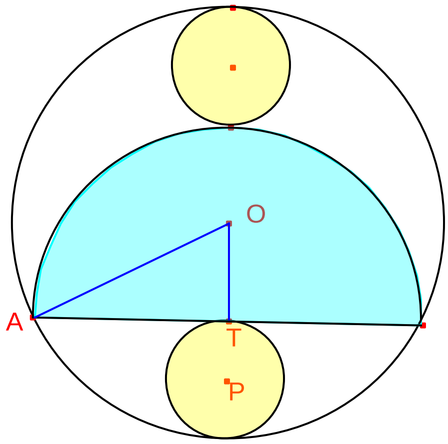
Proporció

$(1/2)r^2$ / (sqrt(5)/2)·r^2 = 2/5

4973.- En la figura els cercles menuts són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



AT=r, PT=s

OA=(4s+r)/2
OT=r/2

Teorema Pitàgores ATO

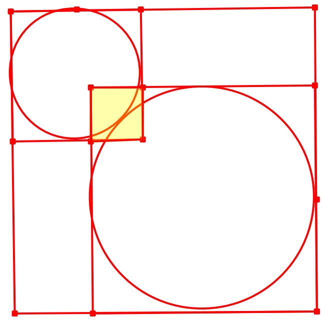
$((4s+r)/2)^2=r^2+r^2/4$

r/s = 1+sqrt(5)

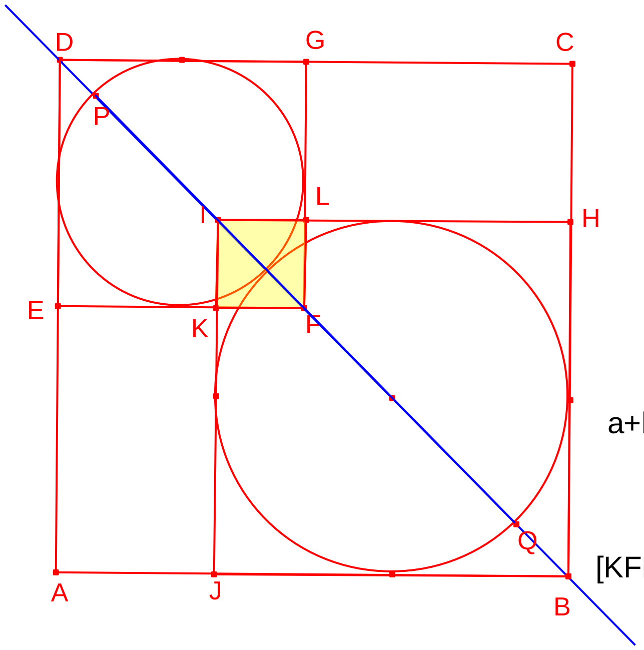
La proporció és:

$(1/2)r^2/(2s^2)=(3+\mathrm{sqrt}(5))/2$

4974.- La figura està formada per quatre quadrats i dues circumferències tangents exteriors. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



EF=a, JB=b KF=c

AB=a+b-c

PQ=a+b

BQ=(1/2)b(sqrt(2)-1)

DP=(1/2)a(sqrt(2)-1)

BD=(a+b-c)sqrt(2)

PQ=BD-(BQ+DP)

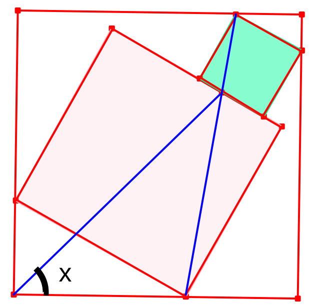
a+b=(a+b-c)sqrt(2)-(a+b)/2·(sqrt(2)-1)

c=(a+b)(2-sqrt(2))/4

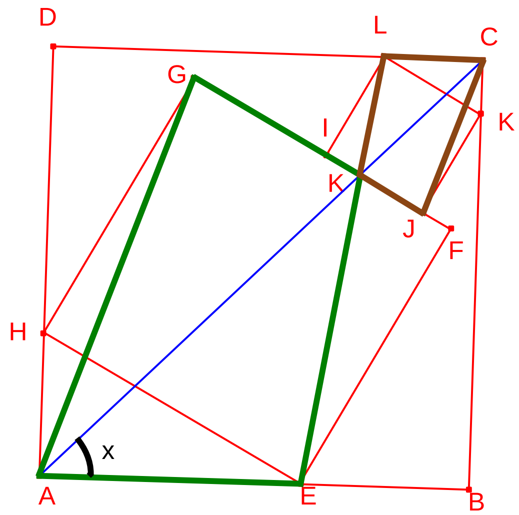
AB=(a+b)(2+sqrt(2))/4

[KFLI]/[ABCD]=$c^2/(a+b-c)^2$=17-12sqrt(2)

4975.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la mesura de l’angle x



Solució:



EF=a, IJ=b

HAE, KCL semblants i de raó a:b

AHG, CKJ semblants i de raó a:b

AG, CJ paral·lels, AG:CJ = a:b

EFK, LIH semblants i de raó a:b

EK:LK = a:b

GE, LJ paral·lels i de raó a:b

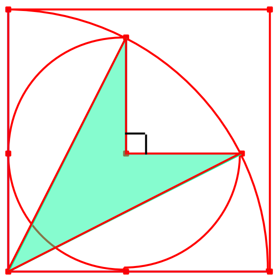
GK:KJ = a:b

AEKG, CLKJ semblants i de costats paral·lels

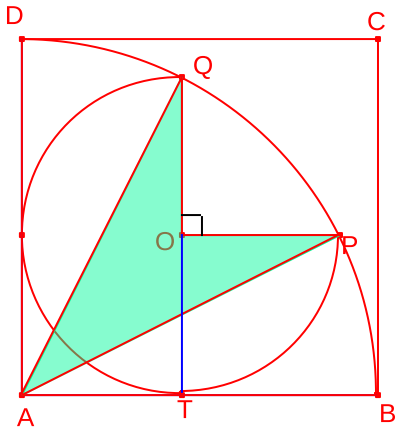
A, K, C alineats

angle KAB=45º

4976.- La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant i un arc de tres quadrants. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=1, OP=r

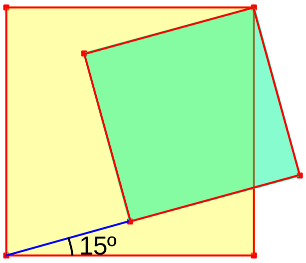
Teorema Pitpagores ATQ

$1=5\cdot r^2$

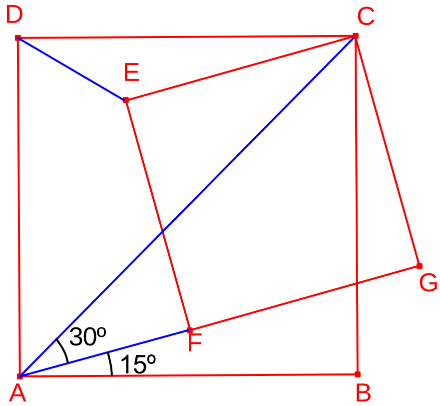
$[APOQ]=2[AOP]=2\cdot(1/2)r^2=1/5$

$[APOQ]/[ABCD]=1/5$

4977.- La figura està formada per dos quadrats. Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat gran i el menut.



Solució:



AB=1, FG=c

AC=sqrt(2=

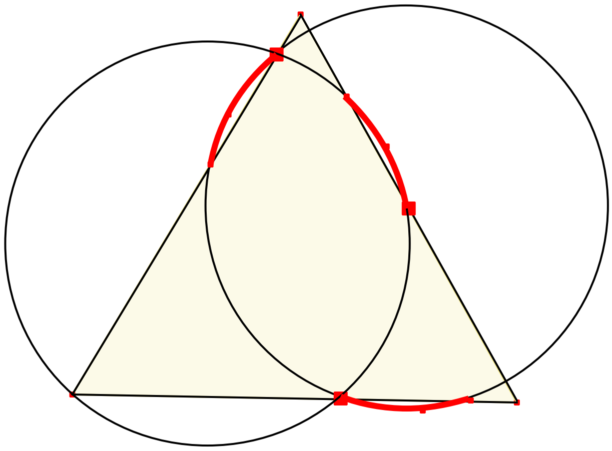
angleCAG=45º-15º=30º

c=CG=(1/2)AC=(1/2)sqrt(2)

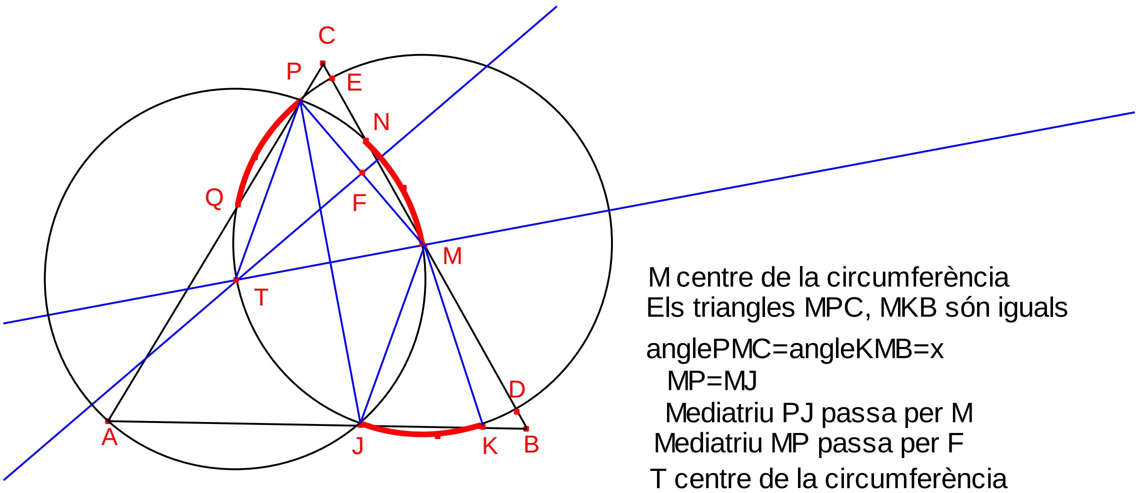
$c^2=1/2$

[ABCD]/[CEFG]=1/c²=2

4978.- La figura està formada per un triangle equilàter i dues circumferències.
El centre de la circumferència de la dreta és el punt mig del costat del triangle.
Les dues interseccions de la circumferència pertanyen al costat del triangle.
Demostreu que els tres arcs vermells són iguals.

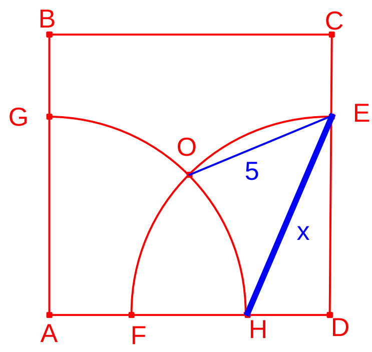


Solució:



M centre de la circumferència
Els triangles MPC, MKB són iguals
anglePMC=angleKMB=x
MP=MJ
Mediatriu PJ passa per M
Mediatriu MP passa per F
T centre de la circumferència
Les dues circumferències tenen el mateix radi
El triangle TMP equilàter
angleQPT=x
angleQMT=2x
arcPQ=60º-2x
anglePTM=2x
arcMN=60º-2x
AngleJK=180º-(120º+x+x)=60º-2x

4979.- Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siguen els quadrants de centres A, D que passen per O.
Calculeu la mesura del segment $x = \overline{HE}$



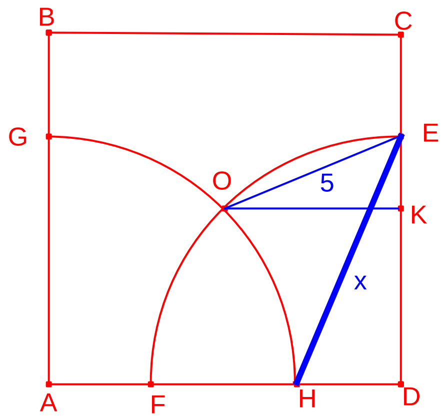
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$, i de centre O

$$\overline{AO} = \overline{AH} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Siga K la projecció de O sobre $\overline{CD}$

$$\overline{OK} = \overline{DK} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{KE} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)c$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKE}$:

$$25 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}c^2$$

$$c^2 = 25(2+\sqrt{2})$$

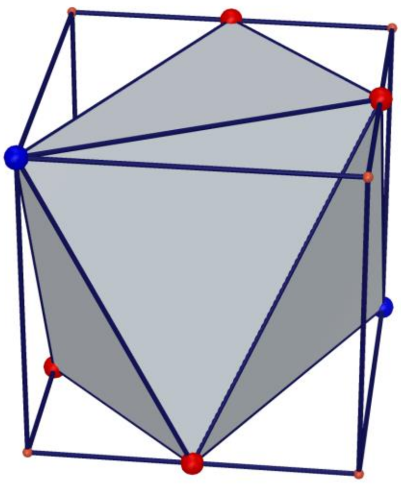
$$\overline{HD} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HDE}$:

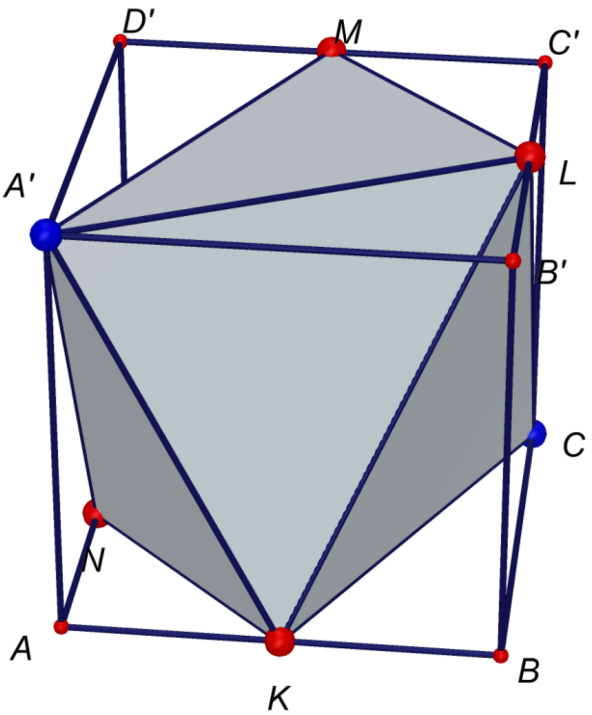
$$x^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)c^2 + \frac{1}{2}c^2 = (2-\sqrt{2})c^2 = (2-\sqrt{2}) \cdot 25(2+\sqrt{2}) = 50$$

$$x = 5\sqrt{2}$$

4980.- La figura està formada per un cub d'aresta 6.
Els quatre punts vermells són punts migs de les arestes
Els dos punts blaus són vèrtexs de les arestes
Calculeu el volum del políedre interior al cub



Solució:



Siga el cub $ABCDA'B'C'D'$ d'aresta $\overline{AB} = 6$
Siguen K, L, M, N els punts migs de les arestes $\overline{AB}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{AD}$, respectivament.
El políedre interior és simètric respecte del plànol $KLMN$.
La diagonal $\overline{A'C} = 6\sqrt{3}$ és perpendicular al plànol $KLMN$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $N\overset{\Delta}{A}K$:
$\overline{NK} = \overline{KC} = 3\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{C}L$:
$\overline{KL} = 3\sqrt{6}$

El volum del políedre és:
$V_{NKCLMA'} = 2 \cdot V_{NKLMA'} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{NKLM} \cdot \frac{1}{2} \overline{A'C} = 2 \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \frac{1}{6} 6\sqrt{3} = 108$