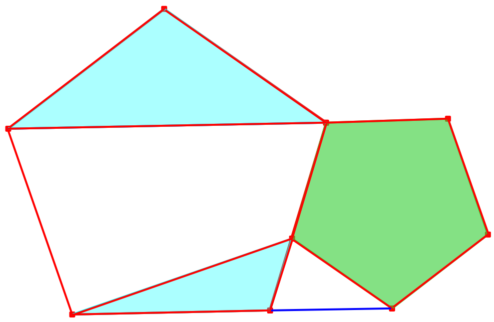
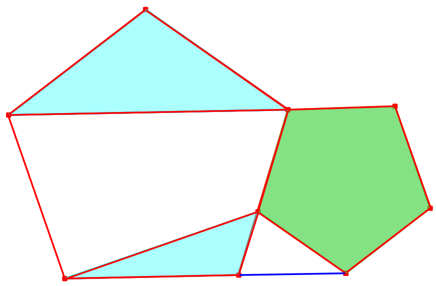
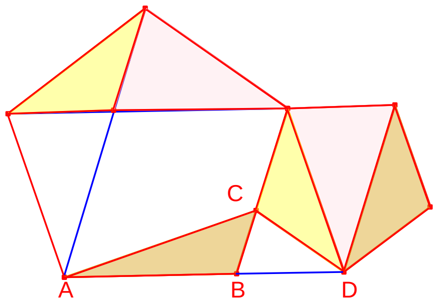
4981.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:

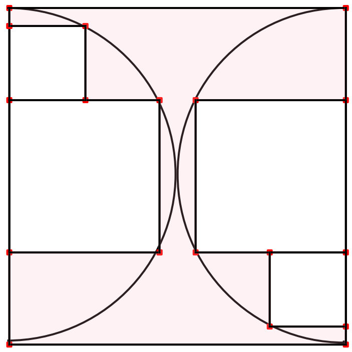


[Blava]=[Verda]

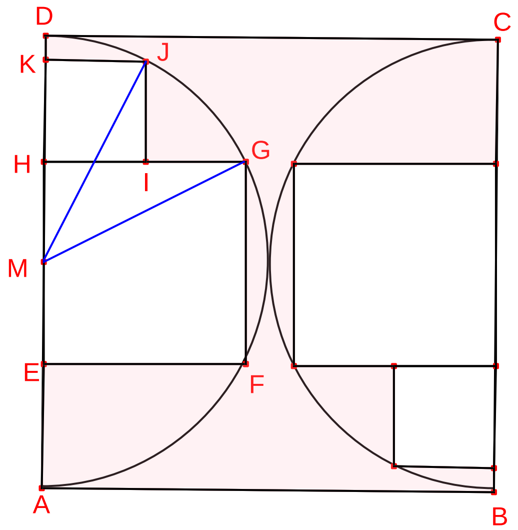


BC=1
CD=Φ
AB=1+Φ = Φ^2

4982.- La figura està formada per cinc quadrats i dues semicircumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrat $EFGH$ inscrit en la semicircumferència de l'esquerra de costat $\overline{EF} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ centre de la semicircumferència de l'esquerra.



$\overline{MG} = 1, \overline{MH} = \frac{1}{2}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MHG}$:

$$c^2 + \frac{1}{4}c^2 = 1$$

$$c^2 = \frac{4}{5}$$

Siga el quadrat HIJK de costat $\overline{HI} = d$

$\overline{MJ} = 1, \overline{MK} = \frac{1}{2}c + d$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MHG}$:

$$d^2 + \left(=\frac{1}{2}c + d\right)^2 = 1$$

$$2d^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}d - \frac{4}{5} = 0$$

Resolent l'equació:

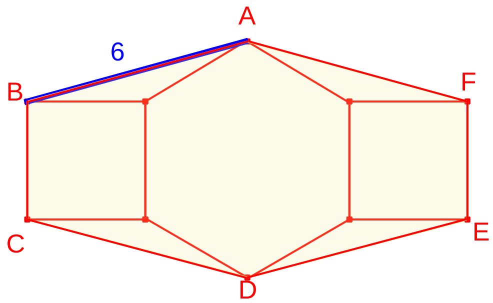
$$d = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$d^2 = \frac{1}{5}$$

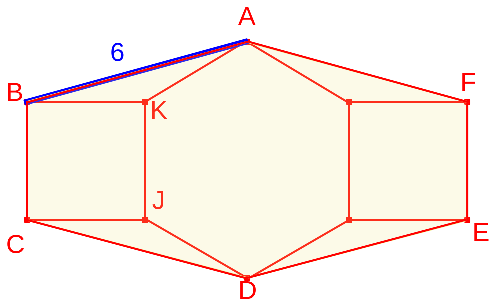
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ABCD} - (2c^2 + 2d^2)}{S_{ABCD}} = \frac{4 - \left(2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5}\right)}{4} = \frac{1}{2}$$

4983.- La figura està formada per un hexàgon i dos quadrats.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon $ABCDEF$.



Solució:
Siga el quadrat $BCJK$ de costat $\overline{BC} = c$
$\angle BKA = 150°$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$36 = c^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 = 36\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$S_{quadrat} = c^2$$

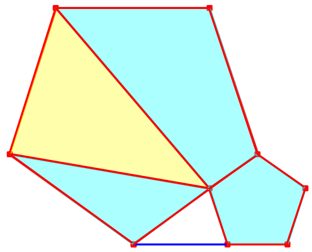
$$S_{Hexàgon} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} c^2 \frac{1}{2}$$

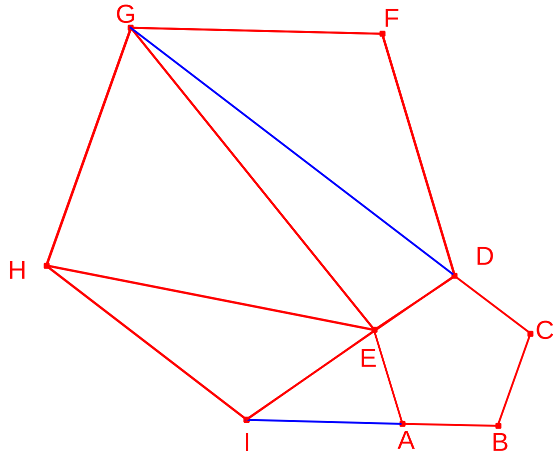
$$S_{ABCDEF} = 2 \cdot S_{quadrat} + S_{Hexàgon} + 4 \cdot S_{ABK} = 2c^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} c^2 =$$

$$= \left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 36\left(2 - \sqrt{3}\right) = 54$$

4984.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l’àrea blava i l’àrea groga.



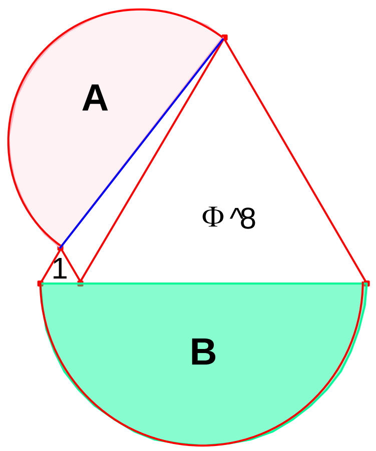
Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\overline{AD} = \overline{AI} = \Phi$
$\overline{ID} = 1 + \Phi = \Phi^2$



Siga P l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{AED}$
$S_{ABD} = S_{IAE} = P \cdot \Phi$
$S_{ABCDE} = (2 + \Phi)P$
$S_{DFGHI} = \Phi^2(2 + \Phi)P$
$S_{ABCDE} = (2 + \Phi)P$
$S_{DFG} = \Phi^4 \cdot P$
$S_{IEH} = \Phi^3 \cdot P$
$S_{EDG} = \Phi^3 \cdot P$

L’àrea groga és:
$S_{GHE} = S_{DFGHI} - 2S_{IEH} - S_{DFG} \cdot= \Phi^2(2 + \Phi)P - 2 \cdot \Phi^3 \cdot P - \Phi^4 \cdot P = 3 + 4\Phi$
L’àrea blava és
$S_{Blava} = S_{ABCDE} + 2S_{IEH} + S_{DFG} \cdot= (2 + \Phi)P + 2 \cdot \Phi^3 \cdot P \mp \cdot P = 6 + 8\Phi$
La proporció d’àrees és:
$$\frac{S_{Blava}}{S_{GHE}} = \frac{6 + 8\Phi}{3 + 4\Phi} = 2$$

4985.- La figura està formada per dos triangles equilàters d'àrees $1, \Phi^8$ i dues semicircumferències d'àrees A, B
Calculeu la proporció entre les àrees:
$\frac{A}{B}$



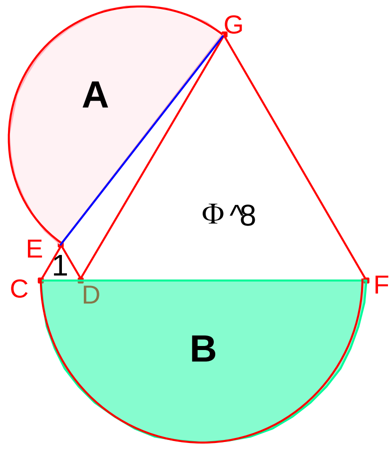
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{CD} = c$ i àrea 1

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DFG}$ d'àrea Φ^8 i de costat $\overline{DF} = c \cdot \Phi^4$

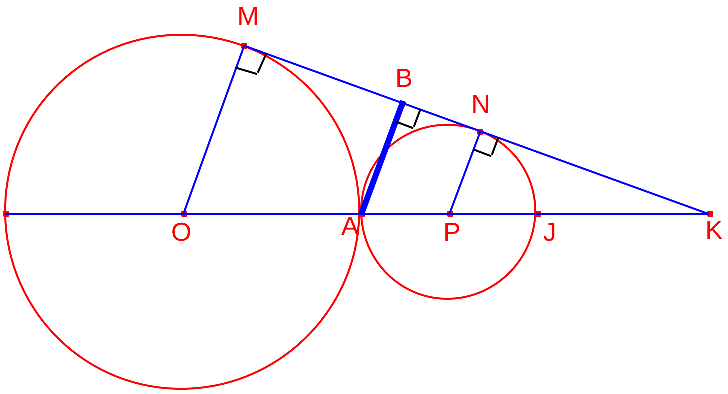
La diagonal del semicercle d'àrea B és:
$\overline{CF} = (1 + \Phi^4)c$
Siga $\overline{EG}$ la diagonal del semicercle d'àrea A

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EDG}$:
$\overline{EG}^2 = (1 + \Phi^8 - \Phi^4)c^2 = 6(2 + 3\Phi)c^2$
$\overline{CF}^2 = (1 + \Phi^4)^2 c^2 = 9(2 + 3\Phi)c^2$
La proporció d'àrees dels dos semicercles és:
$$\frac{A}{B} = \frac{6(2 + 3\Phi)c^2}{9(2 + 3\Phi)c^2} = \frac{2}{3}$$



4986.- Dues circumferències de radis R, r són tangents exterior.
Calculeu la distancia des del punt de tangència a la recta tangent comuna a les dues circumferències.

Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OM} = \overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PJ} = \overline{PN} = r$
A és el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga MN la recta tangent a la circumferència (M, N els punts de tangència)
La recta tangent MN talla la recta OP en el punt K
Siga $\overline{AB} = a$ distància de A a la recta MN
$\angle ABK = 90°$
Siga $\overline{JK} = b$
Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}K, P\overset{\Delta}{N}K, O\overset{\Delta}{M}K$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{2r+b} = \frac{r}{b+r} = \frac{R}{2r+R+b}$$

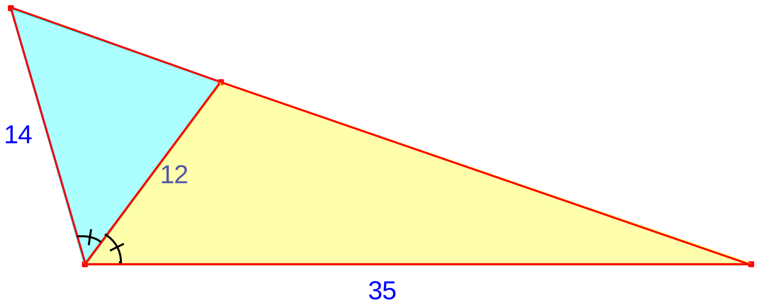
$$\frac{r}{b+r} = \frac{R}{2r+R+b} = \frac{R-r}{R+r}$$

$$b = \frac{2r^2}{R-r}$$

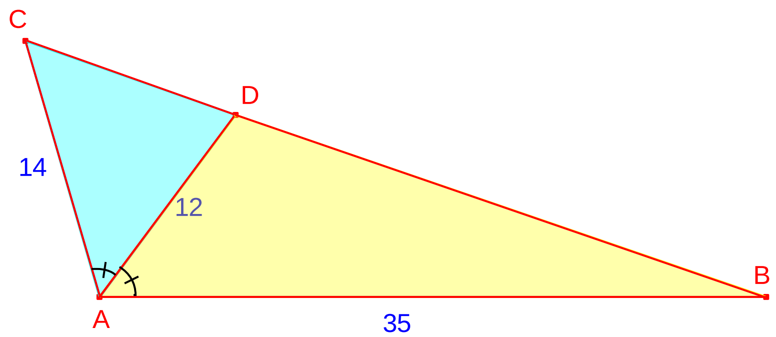
$$\frac{a}{2r+b} = \frac{r}{b+r}$$

$$a = \frac{r\left(2r+\frac{2r^2}{R-r}\right)}{\frac{2r^2}{R-r}+r} = \frac{2r+\frac{2r^2}{R-r}}{1+\frac{2r}{R-r}} = \frac{2Rr}{R+r}$$

4987.- La figura està formada per un triangle de costats 14, 35 i la bisectriu a quests dos costats que mesura 12.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles que es formen amb la bisectriu.



Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 35, \overline{AC} = 14$
Siga $\angle CAD = \angle DAB = \alpha, \overline{AD} = 12$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

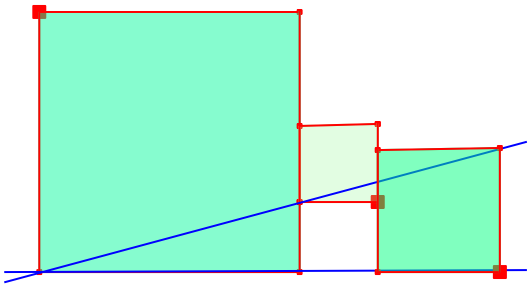
$$\frac{\overline{CD}}{14} = \frac{\overline{BD}}{35}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

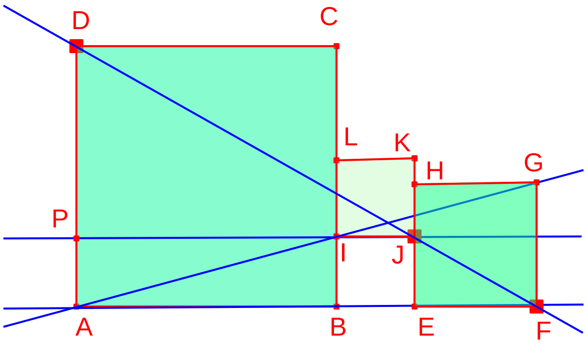
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{2}{5}$$

4988.- La figura està formada per tres quadrat.
Proveu que els punts vermells estan alineats.



Solució:



Siguen els quadrat $ABCD, EFGH, IJKL$, de costats $\overline{AB} = a, \overline{IJ} = b, \overline{EF} = c$
Siga $\overline{BI} = d$

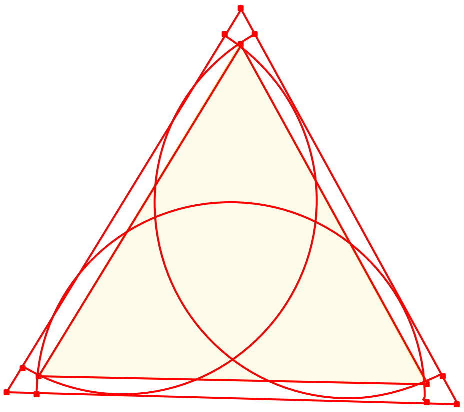
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABI}, \overset{\Delta}{AFG}$ són semblants:
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{d}{c} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{a-d}{a+b}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{a-d}{a+b}, \frac{\overline{EJ}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PJ}}$$

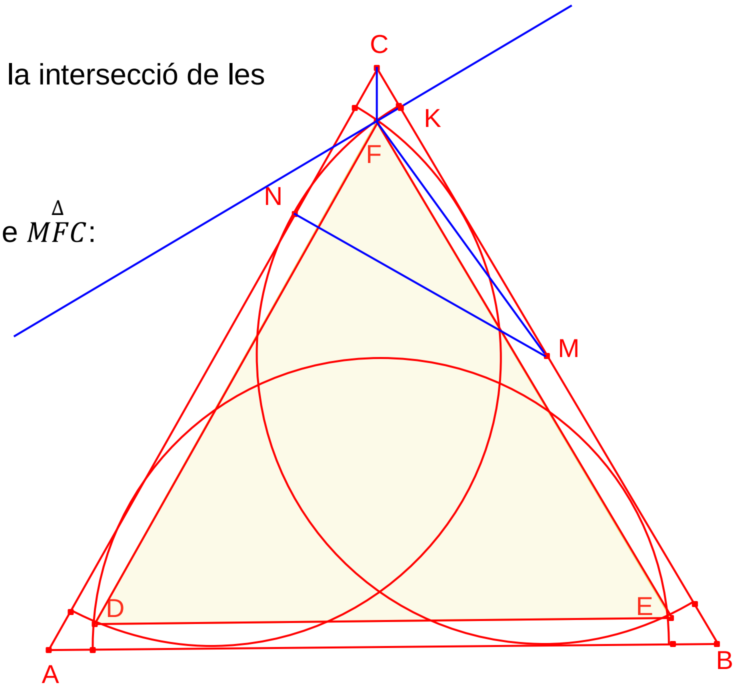
Aplicant el teorema invers de Tales els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FEJ}, \overset{\Delta}{JPD}$ són semblants.
Aleshores, D, J, F alineats

4989.- Sobre els costats d'un triangle equilàter s'han dibuixat tres semicircumferències tangents al altres dos costats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ centre de la semicircumferència.
$\overline{MN} = \sqrt{3}$

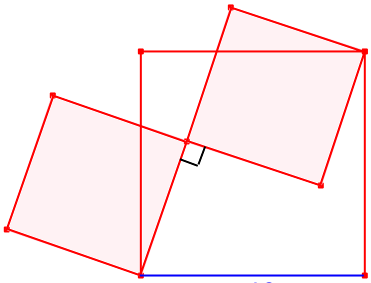


Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ format per la intersecció de les semicircumferències.
Siga K la projecció de F sobre $\overline{BC}$
Siguen $\overline{CF} = x, \acute{F}K = y$

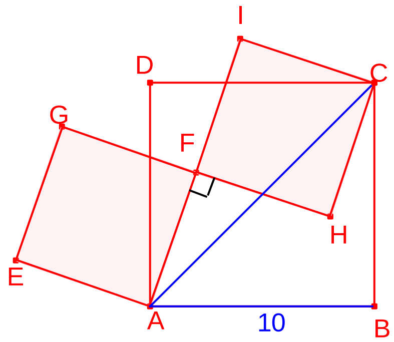
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MFC}$:
$3 = 4 + x^2 - 2x\sqrt{3}$
Resolent l'equació:
$x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$$
El costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ és:
$\overline{EF} = \overline{BC} - 2y = 1 + \sqrt{6}$

La proporció d'àrees dels dos triangles equilàters és:
$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{EF}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{16}$$

4990.- La figura està formada per tres quadrats.
Els dos ombrejats són iguals i formen 90º.
El quadrat gran, el seu costat mesura 10.
Calculeu l'àrea total dels quadrats ombrejats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siguen els quadrat $AFGE, FHCI$ de costats $\overline{AF} = \overline{FH} = c$



$\overline{AC} = 10\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIC}$:
$4c^2 + c^2 = 200$
$c^2 = 40$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 2c^2 = 80$