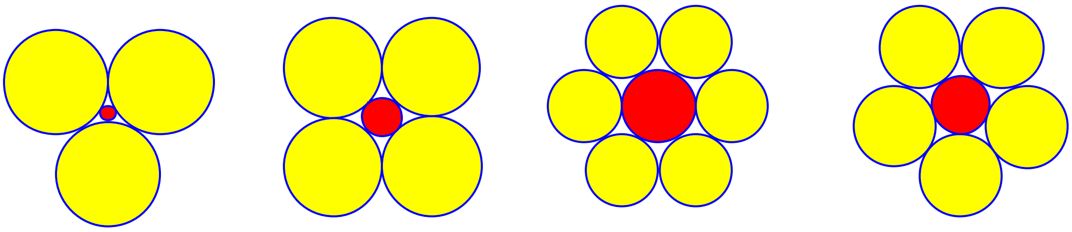
Problemes de Geometria 5 per a l'ESO

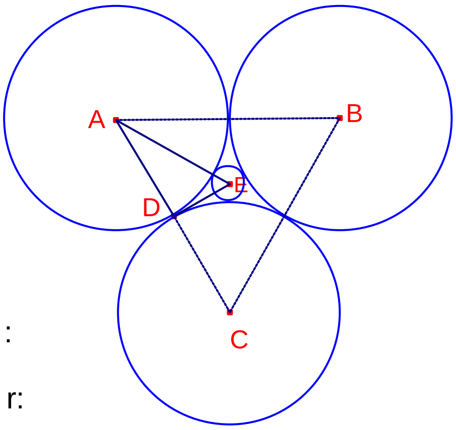
41.- Donades circumferències iguals de radi R i tangents dos a dos (veure figures). Determineu el radi de la circumferència tangent i interior a elles.



Solució:

a)

Siga r el radi de la circumferència tangent interior de centre E.



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ que formen els centres de les tres circumferències iguals és equilàter i de costat 2R.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$ on D és el punt mig del segment $\overline{AC}$.

$\angle DAE = 30^o$.

$\overline{AE} = R + r$, $\overline{AD} = R$, $\overline{DE} = \dfrac{R+r}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

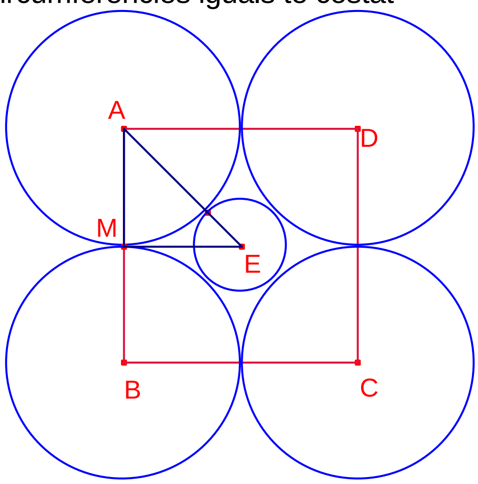
$(R+r)^2 = R^2 + \left(\dfrac{R+r}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}R$.

b)

Siga r el radi de la circumferència tangent interior de centre E.

El quadrat ABCD que formen els centres de les quatre circumferències iguals té costat 2R.



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$ on M és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

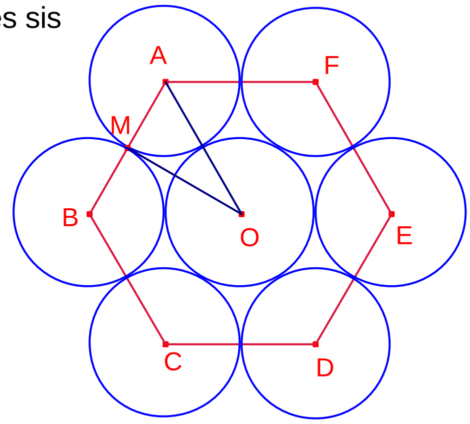
$\overline{AM} = \overline{ME} = R$, $\overline{AE} = R + r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$(R+r)^2 = R^2 + R^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \left(\sqrt{2}-1\right)R$.

c)
Siga r el radi de la circumferència tangent interior de centre O.
L'hexàgon regular ABCDEF que formen els centres de les sis circumferències iguals té costat 2R.



$\overline{AO} = R + r$.

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.

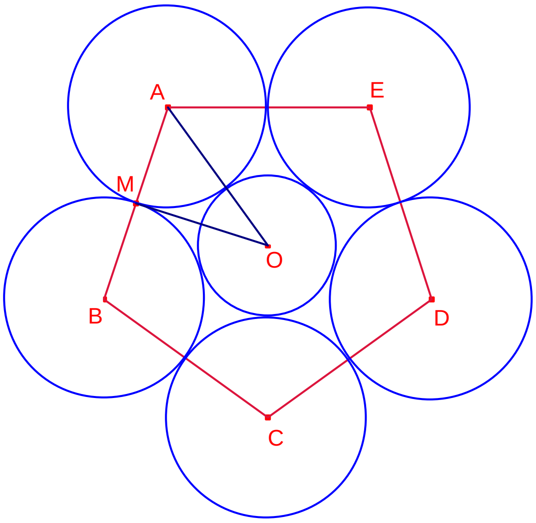
Aleshores, $\overline{AO} = \overline{AB}$.

$R + r = 2R$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = R$.

d)
Siga r el radi de la circumferència tangent interior de centre O.
El pentàgon regular ABCDE que formen els centres de les sis circumferències iguals té costat 2R.

$\overline{AO} = R + r$.



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$ on M és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{AM} = R$, $\overline{AO} = R + r$.

$\angle MAO = 54^{o}$.

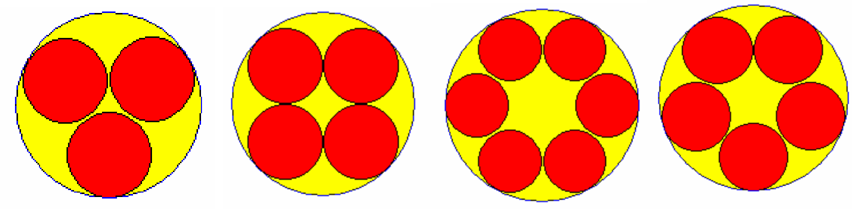
$\sin 54^{o} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos 54^{o} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$\frac{R}{R+r} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} R$.

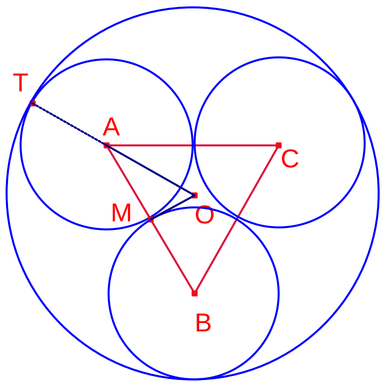
42.- Donades circumferències iguals de radi R i tangents dos a dos (veure figures). Determineu el radi de la circumferència tangent i exterior a elles.



Solució:

a)

Siga $r=\overline{OT}$ el radi de la circumferència tangent exterior de centre O.



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ que formen els centres de les tres circumferències iguals és equilàter i de costat 2R.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$ on M és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\angle OAM = 30^{o}$.

$\overline{OT}=r-R$, $\overline{AM}=R$, $\overline{OM}=\dfrac{r-R}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$:

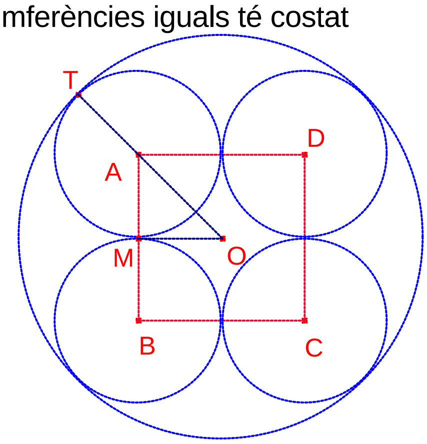
$(R-r)^2 = R^2+\left(\dfrac{r-R}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}R$.

b)

Siga $r=\overline{OT}$ el radi de la circumferència tangent exterior de centre O.

El quadrat ABCD que formen els centres de les quatre circumferències iguals té costat 2R.



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$ on M és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{AM}=\overline{MO}=R$, $\overline{OT}=r-R$.

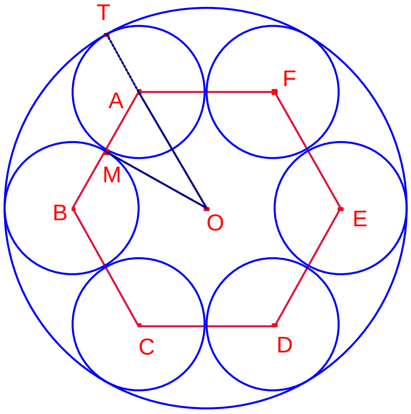
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$(r-R)^2 = R^2+R^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r=\left(\sqrt{2}+1\right)R$.

c)

Siga $r = \overline{OT}$ el radi de la circumferència tangent exterior de centre O.
L'hexàgon regular ABCDEF que formen els centres de les sis circumferències iguals té costat 2R.



$\overline{OA} = r - R$.

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.

Aleshores, $\overline{AO} = \overline{AB}$.

$r - R = 2R$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = 3R$.

d)

Siga r el radi de la circumferència tangent exterior de centre O.
El pentàgon regular ABCDE que formen els centres de les sis circumferències iguals té costat 2R.

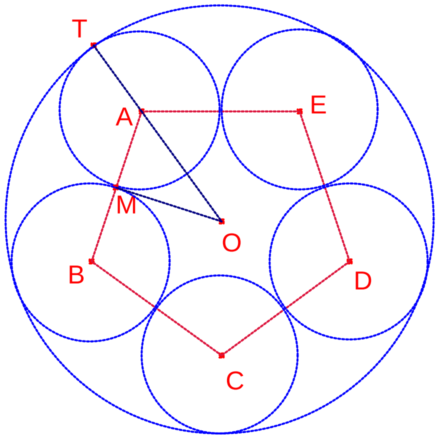
$\overline{OT} = r - R$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$ on M és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{AM} = R$, $\overline{AO} = r - R$.

$\angle MAO = 54^{\circ}$.

$\sin 54^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos 54^{\circ} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

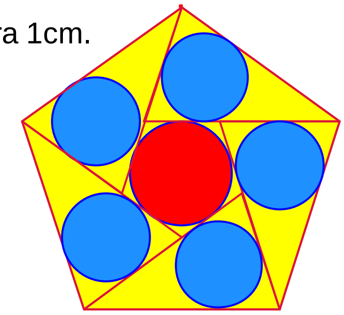


Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$\frac{R}{r-R} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{15+2\sqrt{5}}{5}R$.

43.- En la següent figura el costat del pentàgon regular mesura 1cm.
Calculeu els radis dels dos tipus de circumferències.



Solució:

Siga $\overline{AB}=1$, costat del pentàgon regular gran.

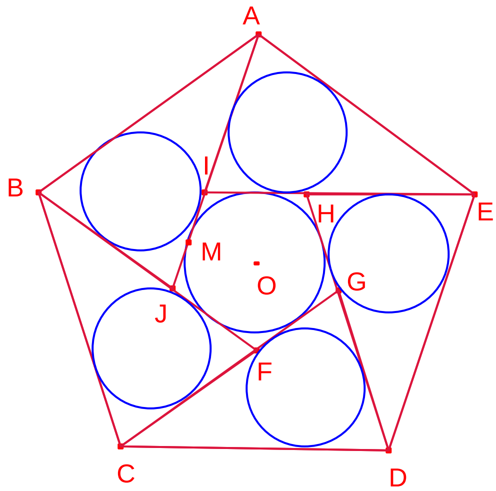
El triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$ és auri, aleshores:

$\overline{BJ}=\frac{1}{\Phi}$, $\overline{IJ}=\frac{1}{\Phi^2}$.

Siga $R=\overline{OM}$ el radi de la circumferència inscrita al pentàgon FGHIJ.

$\overline{MI}=\frac{1}{2\Phi^2}$, $\angle IOM=36^o$, $\cos 36^o=\frac{\Phi}{2}$, $\sin 36^o=\frac{1}{2}\sqrt{3-\Phi}$. $tg36^o=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

$\frac{\overline{IM}}{R}=tg(36^o)$, aleshores, $R=\frac{1}{2\Phi^2 tg36^o}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.



Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle auri $\overset{\Delta}{ABJ}$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:

$$S_{ABJ}=\frac{\overline{AB}+\overline{BJ}+\overline{AJ}}{2}r=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AJ}\cdot\sin 36^o}{2}.$$

$\frac{2+\frac{1}{\Phi}}{2}r=\frac{\sin 36^o}{2}$. Resolent l'equació:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}.$$

La raó entre els radis és:

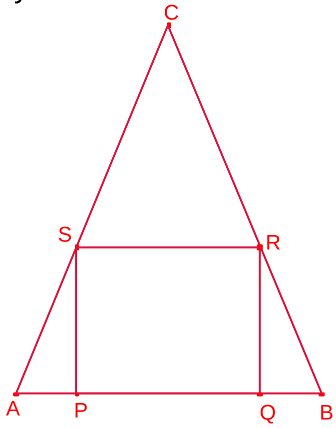
$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}.$$

44.- En un triangle isòsceles els costats iguals mesuren 13cm i el desigual 10cm. Determineu els costats del rectangle inscrit en el triangle (un costat del rectangle està en el costat desigual del triangle) tal que el seu perímetre siga $\frac{3}{5}$ el perímetre del triangle.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 13$, $\overline{AB} = 10$.

Considerem el rectangle PQRS inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga $x = \overline{PQ}$, $y = \overline{PS}$.



Com que el perímetre del rectangle és $\frac{3}{5}$ el perímetre del triangle:

$$\frac{3}{5}(13 + 13 + 10) = 2x + 2y.$$

$$x + y = \frac{54}{5} \qquad (1)$$

Siga $\overline{CD}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$: $\overline{CD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. $\overline{AP} = \frac{10 - x}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{APS}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales: $\frac{12}{5} = \frac{y}{\frac{10 - x}{2}}$.

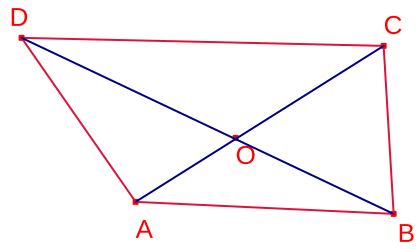
$$6x + 5y = 60 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} 5x + 5y = 54 \\ 6x + 5y = 60 \end{cases}$, la solució del qual és: $\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$.

45.- Siga el quadrilàter convex ABCD. Les diagonals es tallen en el punt O de tal forma que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{BCO}$, $\overset{\Delta}{CDO}$ són 12, 18, 24, respectivament.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD.
Gúsiev 269.

Solució:



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
Siga $a=\overline{OB}, b=\overline{OD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCO}$, $\overset{\Delta}{CDO}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{BCO}}{S_{CDO}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}},\ \frac{18}{24}=\frac{a}{b}.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{ADO}$ tenen la mateixa altura, aleshores.

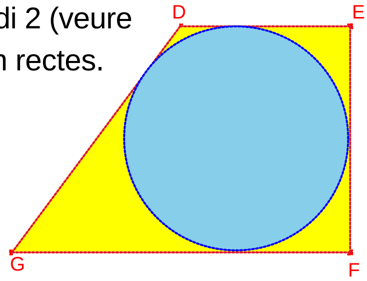
$$\frac{S_{ABO}}{S_{ADO}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

$$\frac{12}{S_{ADO}}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, $S_{ADO}=16$.

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{CDO}+S_{ADO}=12+18+24+16=70.$$

46.- Un trapezi DEFG està circumscrit a una circumferència de radi 2 (veure figura), tal que el costat menut $\overline{DE}$ mesura 3 i els angles E i F són rectes.
Calculeu l'àrea del trapezi.
Crux Mathematicorum M359



Solució:

Siga O el centre de la circumferència.
Siguen T_1, T_2, T_3, T_4. Els punts de tangència de la circumferència i els costats del trapezi.

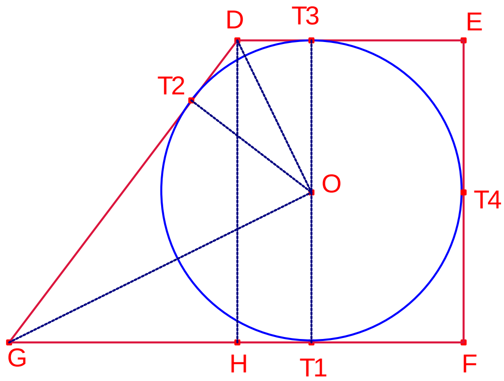
$\overline{OT_1} = \overline{OT_3} = \overline{OT_4} = \overline{ET_3} = \overline{ET_4} = \overline{FT_1} = \overline{FT_4} = 2$.

$\overline{EF} = 4$.

Siga $x = \overline{GT_1} = \overline{GT_2}$, $\overline{DT_2} = \overline{DT_3} = \overline{DE} - \overline{ET_3} = 1$.

Siga H la projecció de D sobre el costat $\overline{GF}$.

$\overline{GH} = x - 1$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GHD}$:

$(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4^2$. Simplificant:

$x = 4$ (1)

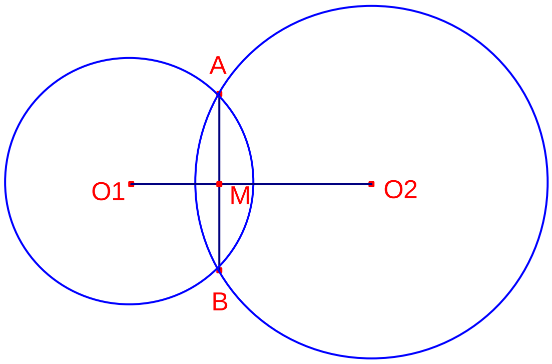
L'àrea del trapezi és:

$$S_{DEFG} = \frac{\overline{GF} + \overline{DE}}{2} \cdot \overline{EF} = \frac{(2+4)+3}{2} 4 = 18.$$

47.- Una corda comuna a dues circumferències que s'intersecten, es veu des dels seus centres sota els angles 90º, 60º. Determineu els radis de les circumferències, si la distància entre els seus centres és igual a a.
Shariguin I84

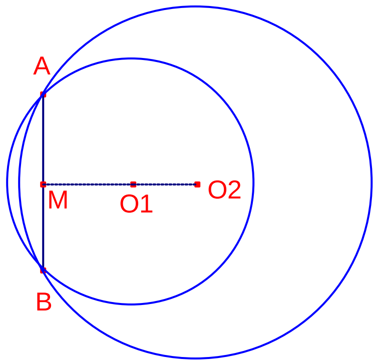
Solució:
Siga $a=\overline{O_1O_2}$, $\overline{AB}$ corda comuna a ambdues circumferències.
Siga $r=\overline{O_1A}$, $\angle AO_1B=90^o$, $R=\overline{O_2A}$, $\angle AO_2B=60^o$.
Hi ha dos possibles casos. Si el segment que formen els centres talla la corda comuna o no.

Primer cas:



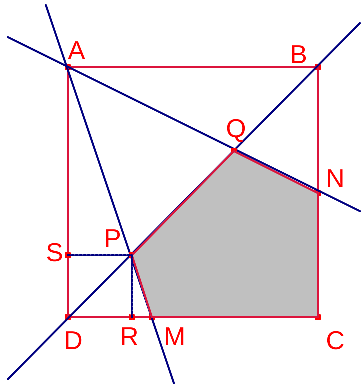
Notem que $\overline{AB}$ és el costat del quadrat inscrit en la circumferència de centre O_1, $\overline{AB}$ és el costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre O_2.
Aleshores, $\overline{AB}=R=r\sqrt{2}$. Siga $x=\overline{O_1M}$.
Per ser $\overset{\Delta}{AMO_1}$ rectangle i isòsceles, $x=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{R}{2}$.
$\angle AO_2M=30^o$. Aleshores, $a-x=\overline{MO_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.
Considerem el sistema, $\begin{cases} x=\frac{R}{2} \\ a-x=\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$. Resolent-lo en les incògnites x, R:
$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a \\ R=\left(\sqrt{3}-1\right)a \end{cases}$. Aleshores, $R=\left(\sqrt{3}-1\right)a$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)a$.

Segon cas:
Notem que $\overline{AB}$ és el costat del quadrat inscrit en la circumferència de centre O_1, $\overline{AB}$ és el costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre O_2.
Aleshores, $\overline{AB}=R=r\sqrt{2}$. Siga $x=\overline{O_1M}$.



Per ser $\overset{\Delta}{AMO_1}$ rectangle i isòsceles, $x=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{R}{2}$.
$\angle AO_2M=30^o$. Aleshores, $a+x=\overline{MO_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.
Considerem el sistema, $\begin{cases} x=\frac{R}{2} \\ a+x=\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$. Resolent-lo en les incògnites x, R:
$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}a \\ R=\left(\sqrt{3}+1\right)a \end{cases}$. Aleshores, $R=\left(\sqrt{3}+1\right)a$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)a$.

48.- Determineu l'àrea del pentàgon limitat per les rectes BC, CD, AN, AM, BD, tal que ABCD són els vèrtexs d'un quadrat, N és el punt mig de $\overline{BC}$ i M divideix el segment $\overline{CD}$ en raó 2:1 (calculant a partir del vèrtex C), si el costat del quadrat ABCD és a.
Shariguin I90.



Solució.
Siga PQNCM el pentàgon format.

$S_{ADM} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$

Siga R la projecció de P sobre la recta CD, S la projecció de P sobre la recta AD.

$\overline{PS} = \overline{PR}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$\frac{S_{DMP}}{S_{APD}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}$. Aleshores, $\frac{S_{DMP}}{S_{ADM}} = \frac{1}{4}$.

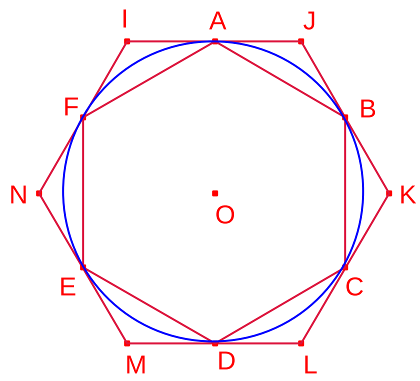
Per tant, $\frac{S_{DMP}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Anàlogament, $\frac{S_{DNQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{12}$.

$$S_{PQNCM} = S_{BCD} - (S_{DMP} + S_{BNQ}) = \frac{1}{2} S_{ABCD} - \left(\frac{1}{24} S_{ABCD} + \frac{1}{12} S_{ABCD} \right) = \frac{3}{8} S_{ABCD} = \frac{3}{8} a^2 .$$

49.- Un hexàgon regular està inscrit en una circumferència, mentre que un altre està circumscrit a la circumferència. Determineu el radi de la circumferència si la diferència dels perímetres dels hexàgons és igual a a.
Shariguin I77.

Solució:
Siga la circumferència de radi R.
Siga l'hexàgon regular ABCDEF de inscrit en la circumferència de perímetre p.
Siga l'hexàgon regular IJKLMN de circumscrit en la circumferència de perímetre P.



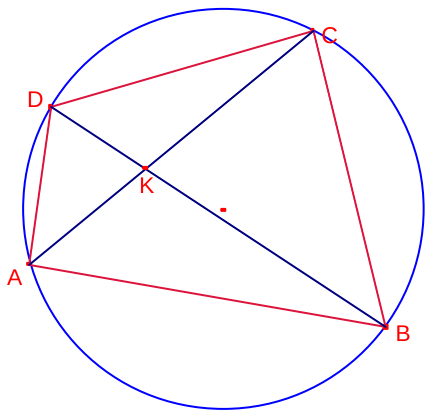
Siga $\overline{IJ} = \overline{OI}$ costat de l'hexàgon regular circumscrit.
Siga $\overline{AB} = \overline{OA} = R$ costat de l'hexàgon regular inscrit.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectange $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Els dos hexàgons són semblants i la raó de semblança és:
$$\frac{P}{p} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OI}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OI}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$
Aleshores, $3P = 2\sqrt{3}p$ (1)
Per hipòtesi $P - p = a$ (2)
Considerant el sistema format per les expressions (1), (2):
$\begin{cases} 3P - 2\sqrt{3}p = 0 \\ P - p = a \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} p = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)a \\ P = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)a \end{cases}$

$$R = \overline{OA} = \overline{AB} = \frac{p}{6} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}a.$$

50.- Els angles d'un quadrilàter ABCD inscriptible en una circumferència són $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Les diagonals s'intersecten en el punt K i l'angle $\angle BKC = \gamma$.
Determineu l'angle $\angle ACD$.
Shariguin I79.

Solució:
Pel Teorema de Tolomeu, els angles oposats d'un quadrilàter inscriptible són suplementaris.



Siga $x = \angle ACD$, $y = \angle DAC$.
Aleshores, $\angle CAB = \alpha - y$, $\angle ACB = (180^o - \alpha) - x$,
$\angle ADC = 180^o - \beta$
Per ser angles inscrits i abraçar el mateix arc:
$y = \angle DAC = \angle DBC$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{KBC}$ és 180º:
$\gamma + 180^o - \alpha - x + y = 180^o$.
$-x + y = \alpha - \gamma$ (1)

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és 180º:
$x + y + 180^o - \beta = 180^o$.
$x + y = \beta$ (2)

Considerem els sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases} x - y = \alpha - \gamma \\ x + y = \beta \end{cases}$. Resolent el sistema en les incògnites x, y:

$\begin{cases} x = \dfrac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \\ y = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \end{cases}$. Aleshores, $x = \angle ACD = \dfrac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}$.