Problemes de Geometria per a l'ESO 50

491.- Dibuixem polígons regulars.
Un d'ells, els costats de color roig i les diagonals de color verd, l'altre els costats de color verd i les diagonals de color roig.
Hi ha un totals de 103 segments de color roig i 80 segments de color verd.
Quantes cares té cada polígon.
KöMaL, C1105.

Solució:

Si un polígon convex té n costats de color roig té $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonals de color verd.

Si un polígon convex té m costats de color verd té $\frac{m(m-3)}{2}$ diagonals de color roig.

$n+\frac{m(m-3)}{2}=103$. Simplificant:

$2n+m^2-3m=206$ (1)

$\frac{n(n-3)}{2}+m=80$. Simplificant:

$2m+n^2-3n=80$ (2)

Restant les expressions (1) (2):

$2(n-m)+m^2-n^2+3(n-m)=46$ (3)

$2(n-m)+(m+n)(m-n)+3(n-m)=46$ (4)

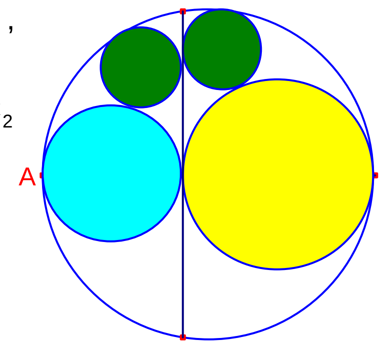
$(m-n)(m+n+5)=2\cdot 23$, $n,m\in N$ (5)

$\begin{cases} m+n+5=23 \\ m-n=2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} n=13 \\ m=15 \end{cases}$

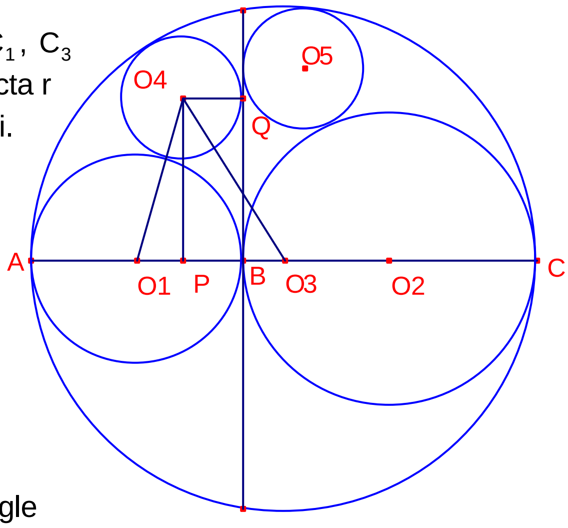
El polígon de costats roig té 13 costats.
El polígon de costats verd té 15 costats.

492.- Siga B un punt del segment $\overline{AB}$.
Considerem les circumferències C_1, C_2, C_3 de diàmetre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ de radis r_1, r_2, r_3, respectivament.
Considerem la tangent comuna r a les circumferències C_1, C_2 pel punt B.
Considerem les circumferències tangent a la recta r i a les circumferències C_1, C_3, i C_2, C_3, respectivament.
Proveu que tenen el mateix radi r_4 i que i a més a més
$r_1 \cdot r_2 = r_3 \cdot r_4$.
KöMaL, B4415.



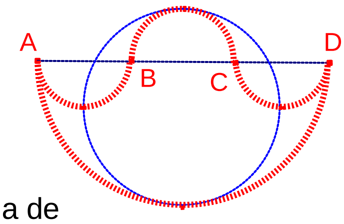
Solució:
$r_3 = r_1 + r_2$.

Siga O_1, O_3 els centres de les circumferències C_1, C_3
Siga O_4 la circumferència tangent tangent a la recta r i a les circumferències C_1, C_3 i siga r_4 el seu radi.
Siga P la projecció de O_4 sobre $\overline{AC}$, siga Q la projecció de O_4 sobre R.
$\overline{O_1O_4} = r_1 + r_4$, $\overline{O_3O_4} = r_3 - r_4$, $\overline{O_1P} = r_1 - r_4$,
$\overline{O_4Q} = r_4$, $\overline{O_3P} = r_3 - 2 \cdot r_1 + r_4$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1PO_4}$:
$\overline{O_4P}^2 = (r_1 + r_4)^2 - (r_1 - r_4)^2 = 4r_1 \cdot r_4$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_3PO_4}$:
$\overline{O_4P} = (r_3 - r_4)^2 - (r_3 - 2r_1 + 4r_4)^2 = 4r_1 \cdot r_4 - 4r_3 \cdot r_4 - 4r_1^2 + 4r_1 \cdot r_3$.
Igualant ambdues expressions:
$4r_1 \cdot r_4 = 4r_1 \cdot r_4 - 4r_3 \cdot r_4 - 4r_1^2 + 4r_1 \cdot r_3$.
$-4r_3 \cdot r_4 - 4r_1^2 + 4r_1 \cdot r_3 = 0$.
$4r_3 \cdot r_4 = -4r_1^2 + 4r_1 \cdot r_3$.
$4r_3 \cdot r_4 = -4r_1(r_3 - r_2) + 4r_1 \cdot r_3$.
Simplificant:
$r_1 \cdot r_2 = r_3 \cdot r_4$.

Anàlogament:
Siga O_5 la circumferència tangent tangent a la recta r i a les circumferències C_2, C_3 i siga r_5 el seu radi.
$r_1 \cdot r_2 = r_3 \cdot r_5$.
Aleshores, $r_4 = r_5$.



493.- Siguen B, C dos punts del segment $\overline{AD}$ (B entre A i C) tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$. La figura limitada per les semicircumferències de diàmetres $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ (en el mateix semipànol determinat pel segment $\overline{AD}$ i la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$ en l'altre semiplànol és igual a l'àrea del cercle tangent interior a la semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$ i tangent exterior a la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$.
Olimpíada alemanya.

Solució:
Siga $\overline{AD} = 2R$, $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$.
Aleshores, $\overline{BC} = 2R - 4r$.
L'àrea limitada per les 4 semicircumferències és igual a l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$, més l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{BC}$ menys l'àrea de dos semicercles de diàmetre $\overline{AB}$.

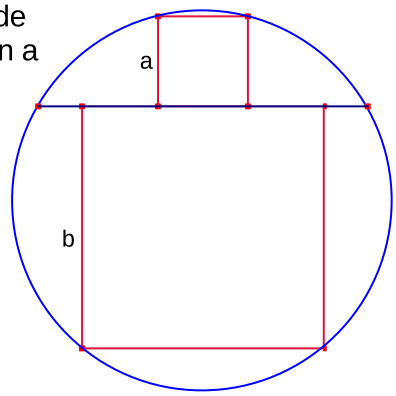
$$S_{4\,\text{Semicercles}} = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi(R-2r)^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2 - 2Rr) = \pi(R-r)^2.$$

El cercle tangent interior a la semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$ i tangent exterior a la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$ té diàmetre la suma del radi del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$ i del semicercle de diàmetre $\overline{BC}$.
El radi és:

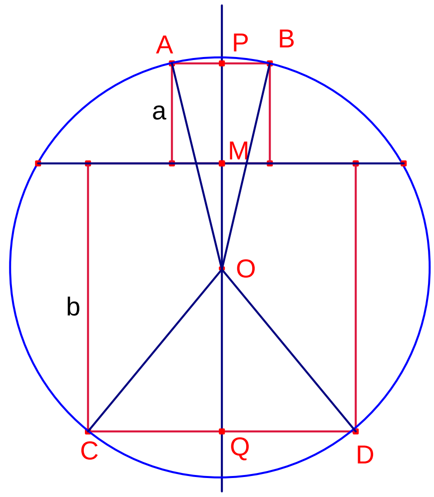
$$s = \frac{R + \frac{2R-4r}{2}}{2} = R - r.$$

$$S_{\text{cercle}} = \pi(R-r)^2.$$

494.- Dos quadrats de longituds de costats a, b estan disposats de manera que dos vèrtexs pertanyen al cercle i altres dos pertanyen a una corda (veure figura).
a) Determineu la distància del centre del cercle a la corda en funció de a, b.
b) Determineu el radi del cercle en funció dels costats a, b dels quadrats.
Olimpíada alemanya.



Solució:
Siga O el centre del cercle de radi r
Siga M el punt mig de la corda.
La recta OM passa pels punts migs dels costats que tenen els vèrtexs A, B i C, D en la circumferència.
Siguen P i Q els punts migs.
Siga $x=\overline{OM}$ distància del centre de la circumferència a la corda.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPA}$:

$$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a+x)^2 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:

$$r^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(b-x)^2 .$$

Igualant les expressions:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a+x)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(b-x)^2 .$$

$\frac{a^2}{4}+a^2+x^2+2ax=\frac{b^2}{4}+b^2+x^2-2bx$. Simplificant:

$$\frac{5a^2}{4}+2ax=\frac{5b^2}{4}-2bx .$$

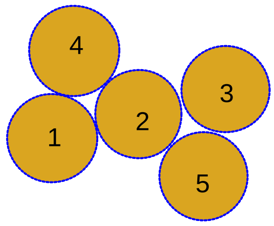
Resolent l'equació i simplificant:

$$x=\frac{5}{8}(b-a) .$$

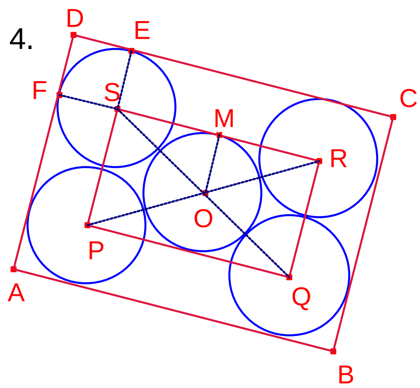
El radi de la circumferència és:

$$r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a+\frac{5}{8}(b-a)\right)^2}=\frac{\sqrt{25a^2+25b^2+30ab}}{8} .$$

495.- 5 monedes de radi 1 numerades del 1 al 5 de la figura estan disposades de forma que 1, 2, 3 estan alineades.
Construïm un quadrilàter que conté les 5 monedes tal que els costats són tangents a les monedes 1, 5, l'altre 3, 4, l'altre a, 4, l'altre 3, 5.
Determineu l'àrea del quadrilàter.
Olimpíada italiana.



Solució:

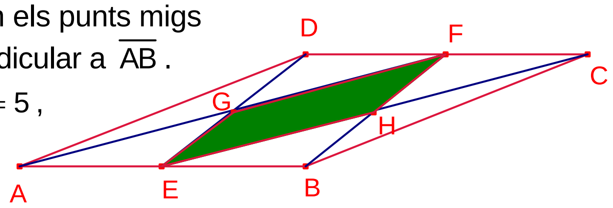


Siga ABCD el quadrilàter exterior tangent a les monedes 1, 5, 3, 4.
Siguen O, P, Q, R, S els centres de les 5 monedes.
Notem que els centre O, P S formen un triangle equilàter de costat 2.
$\angle SOR = 120^{\circ}$.
Aleshores, P, Q, R, S formen un rectangle.
Els costats del quadrilàter ABCD són paral·lels al rectangle PQRS, aleshores, ABCD és un rectangle.
Siguen E, F els punts de tangència de la circumferència 4 i els costats $\overline{CD}$, $\overline{AD}$.
$\overline{SE} = \overline{SF} = 1$.
Aleshores, $\overline{AD} = \overline{SP} + 2 \cdot \overline{SE} = 4$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{SR}$.

$\angle SOM = 60^{\circ}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOM}$
$\overline{SM} = \sqrt{3}$.
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{SM} + 2 \cdot \overline{SF} = 2\sqrt{3} + 2$.

L'àrea del rectangle ABCD és:
$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = (2\sqrt{3} + 2)4 = 8 + 8\sqrt{3}$.



496.- En el paral·lelogram ABCD de la figura, E, F són els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament. $\overline{BD}$ és perpendicular a $\overline{AB}$. Calculeu l'àrea del quadrilàter GEHF sabent que $\overline{AB}=5$, $\overline{BD}=2$.
Olimpíada italiana.

Solució:

$\overline{EB}=\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, aleshores, EBFD és un paral·lelogram.

L'altura del paral·lelogram EBFD sobre la base $\overline{EF}$ és $\overline{BD}$.

$\overline{BE}=\overline{CF}$, $\angle HFC=\angle EBH$, $\angle HCF=\angle HEB$, aleshores els triangles $\overset{\Delta}{CFH}$, $\overset{\Delta}{EBH}$, són iguals.

Aleshores, $\overline{EH}=\overline{CH}$, $\overline{BH}=\overline{FH}$.

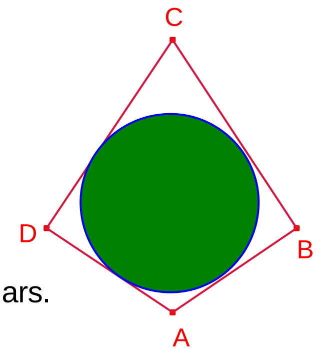
Anàlogament, $\overline{AG}=\overline{FG}$, $\overline{DG}=\overline{EG}$.

Per tant, GH és paral·lela mitjana del paral·lelogram EBFD.

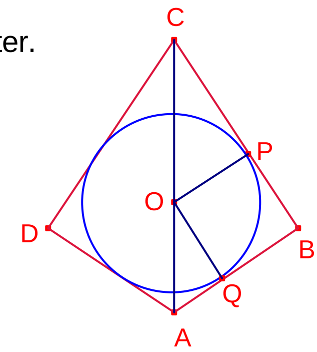
L'àrea del quadrilàter GEHF és igual a l'àrea del paral·lelogram EBHF, aleshores:

$$S_{GEHF}=S_{EBHG}=\frac{1}{2}S_{EBFD}=\frac{1}{2}\overline{EB}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\frac{5}{2}2=\frac{5}{2}.$$

497.- En un quadrilàter ABCD $B = D = 90º$, $\overline{AB} = \overline{AD} = 20$, $\overline{BC} = \overline{CD} = 30$.
Calculeu el radi de la circumferència inscrita al quadrilàter.



Solució:
El quadrilàter ABCD té circumferència inscrita ja que
$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = 50$.
Notem que les diagonals d'aquest quadrilàter són perpendiculars.
El centre O de la circumferència inscrita al quadrilàter ABCD pertany a la diagonal $\overline{AC}$.
Siguen P i Q els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle i els costats $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, respectivament.
Siga $r = \overline{OP} = \overline{OQ}$ el radi de la circumferència inscrita al quadrilàter.

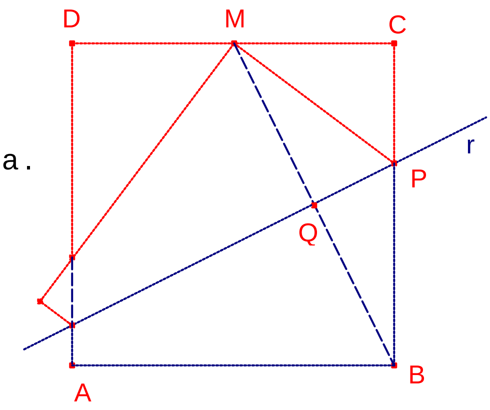


$\overline{PB} = \overline{BQ} = r$.
$\overline{PC} = 30 - r$, $\overline{AQ} = 20 - r$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPC}$, $\overset{\Delta}{AQO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{AQ}}.$$

$$\frac{30 - r}{r} = \frac{r}{20 - r}$$. Resolent l'equació:
$r = 12$.

498.- Doblegant un paper quadrat ABCD, fem coincidir el punt B en el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Amb el plegat el costat $\overline{BC}$ ha quedat dividit en dos segments de longituds a, b $a \le b$.
Calculeu $\frac{b}{a}$.
Olimpíada italiana.



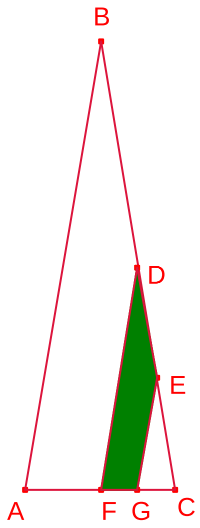
Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$ del quadrat ABCD
La recta del plegat del paper és la mediatriu del segment $\overline{BM}$.
La recta r talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P tal que $\overline{BP}=b$, $\overline{CP}=a$.
$\overline{BC}=a+b$, $\overline{CM}=\frac{a+b}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCM}$:
$\overline{BM}=\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$.
Siga Q la intersecció de la recta r i el segment $\overline{BM}$.
$\overline{BQ}=\frac{\overline{BM}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}(a+b)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCM}$, $\overset{\Delta}{BQP}$ són semblant.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$.

$$\frac{a+b}{\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}(a+b)}{b}.$$
Simplificant:
$\frac{5}{8}\frac{(a+b)}{b}=1$
$3b=5a$.

Aleshores, $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$.



499.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ tal que $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{AC}$ i de perímetre 84.
Siga D el punt mig de $\overline{BC}$, E el punt mig de $\overline{CD}$.
Siga F el punt mig de $\overline{AC}$, G el punt mig de $\overline{CF}$.
Determineu l'àrea i el perímetre del quadrilàter FGED.

Solució:

$\overline{DF}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{GE}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{FDC}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FDC}$, $\overset{\Delta}{GEC}$ són semblants i estan en relació $4:2:1$.

Calculem els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$2 \cdot \overline{AB} + \overline{AC} = 84$.

$2 \cdot 3 \cdot \overline{AC} + \overline{AC} = 84$.

$7 \cdot \overline{AC} = 84$.

Aleshores, $\overline{AC} = 12$, $\overline{AB} = \overline{BC} = 36$.

$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 18$, $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{DF} = 9$.

$\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{BC} = 9$, $FG = \frac{1}{4}\overline{AC} = 3$.

Els perímetre del quadrilàter FGED és:

$P_{FGED} = \overline{DF} + \overline{FG} + \overline{EG} + \overline{DE} = 18 + 3 + 9 + 9 = 39$.

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{84 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 60}}{4} = 36\sqrt{35}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FDC}$ són semblants i la raó és 2:1. Les àrees són proporcionals als quadrats de la raó de semblança:

$$S_{FDC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = 9\sqrt{35}.$$

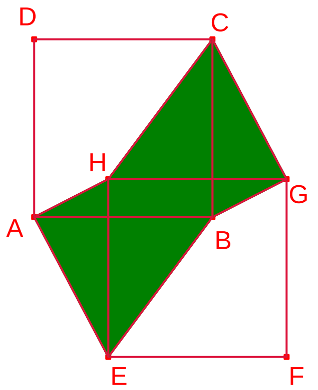
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{GEC}$ són semblants i la raó és 4:1. Les àrees són proporcionals als quadrats de la raó de semblança:

$$S_{GEC} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{ABC} = \frac{9}{4}\sqrt{35}.$$

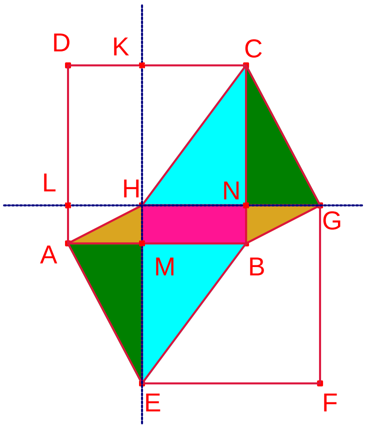
L'àrea del quadrilàter FGED és igual a la diferència de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{FDC}$, $\overset{\Delta}{GEC}$, aleshores:

$$S_{FGED} = S_{FDC} - S_{GEC} = 9\sqrt{35} - \frac{9}{4}\sqrt{35} = \frac{27}{4}\sqrt{35}.$$

500.- Els quadrats ABCD, EFGH són iguals i tenen els costats paral·lels, amb H interior al quadrat ABCD.
Si l'àrea de la zona ombrejada és 1, calculeu l'àrea del quadrat ABCD.



Solució:



Siga M la projecció de H sobre $\overline{AB}$
Siga K la projecció de H sobre $\overline{CD}$.
Siga L la projecció de H sobre $\overline{AD}$.
Siga N la projecció de H sobre $\overline{BC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BME}$, $\overset{\Delta}{CKH}$ són iguals.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BNG}$, $\overset{\Delta}{ALH}$ són iguals.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AME}$, $\overset{\Delta}{DKH}$ són iguals.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NGC}$, $\overset{\Delta}{LHD}$ són iguals.

Aleshores, l'àrea del quadrat ABCD i la de l'hexàgon AEBGCH són iguals.
Per tant, l'àrea del quadrat ABCD és 1.