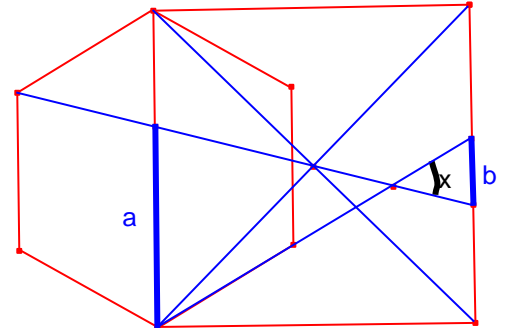


Problemes de Geometria per a l'ESO 500

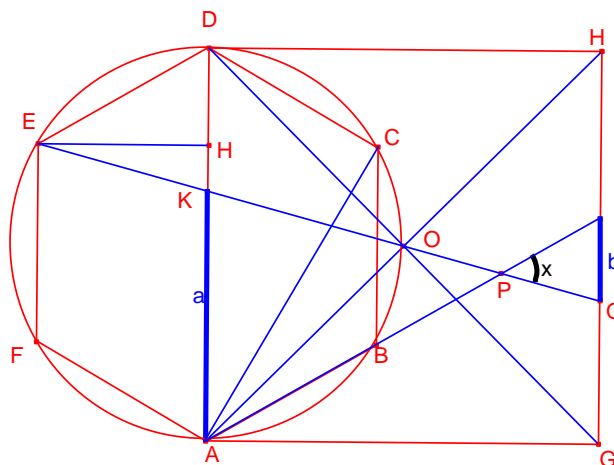
4991.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrat.

Calculeu:

- La mesura de l'angle x
- La proporció $a : b$



Solució:



$$\text{angleAOD} = \text{angleACD} = 90^\circ$$

ABOCDEF cíclic

$$\text{angleDEO} = \text{angleHDG} = 45^\circ$$

$$x = \text{angleRPQ} = \text{angleDEO} = 45^\circ$$

$$AB = c$$

$$DK = (\sqrt{3}-1)c$$

$$a = 2c - DK = (3-\sqrt{3})c$$

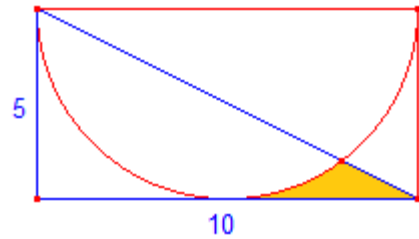
Els triangles DEK, RPQ, APK semblants

$$(a+b)/DK = 2c/EH$$

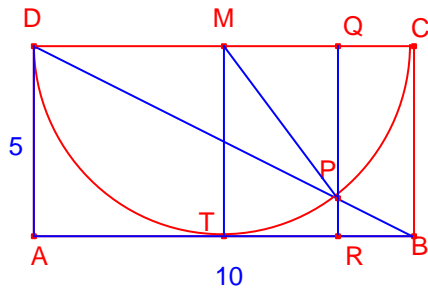
$$b = (3-\sqrt{3})/3$$

$$a/b = 3$$

4992.- La figura està formada per un rectangle de costats 10, 5 i una semicircumferència inscrita. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 5$
Siga M el punt mig del costat \overline{CD}

Siga P la intersecció de la diagonal BD i la semicircumferència.
Siguen Q, R les projeccions de O sobre $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament.

Siga $\overline{QP} = a, \overline{DQ} = 2a$

$\overline{MQ} = 2a - 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MQP$:

$$25 = a^2 + (2a - 5)^2$$

Resolent l'equació:

$$a = 4$$

$$\overline{MQ} = 3, \overline{CQ} = \overline{BR} = 2$$

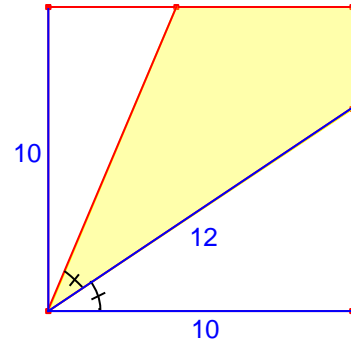
Siga $\alpha = \angle TMP$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

L'àrea ombrejada és:

$$\begin{aligned} S_{\text{ombrejada}} &= S_{TRQM} - S_{\text{sector}} - S_{MQP} + S_{RBP} = 15 - \frac{\arcsin \frac{3}{5}}{2} \cdot 5^2 - 6 + 1 = \\ &= 10 - \frac{25}{2} \arcsin \frac{3}{5} \approx 1.9562 \end{aligned}$$

4992.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
 Calculeu el perímetre del quadrilàter ombrejat.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$

Siga $\alpha = \angle EAB = \angle FAE$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABE$:

$$\overline{AE} = 2\sqrt{11}, \overline{CE} = 10 - 2\sqrt{11}$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{12}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{11}}{12}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{18}, \cos 2\alpha = \frac{7}{18}, \tan 2\alpha = \frac{7}{5\sqrt{11}}$$

$$\angle DAF = 90^\circ - 2\alpha$$

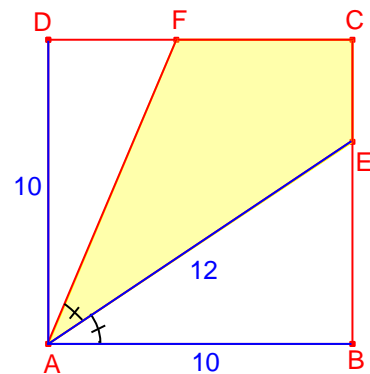
$$\overline{DF} = 10 \cdot \tan 2\alpha = \frac{14}{\sqrt{11}}$$

$$\overline{CF} = 10 - \frac{14\sqrt{11}}{11}$$

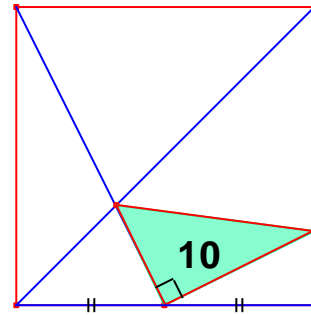
$$\overline{AF} = \frac{10}{\sin 2\alpha} = \frac{36}{\sqrt{11}} = \frac{36\sqrt{11}}{11}$$

El perímetre del quadrilàter $AECF$ és:

$$P_{AECF} = 12 + 10 - 2\sqrt{11} + 10 - \frac{14\sqrt{11}}{11} + \frac{36\sqrt{11}}{11} = 32$$



4994.- En la figura, el triangle rectangle ombrejat té àrea 10
 Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMD$:

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Els triangles $\triangle AML$, $\triangle CDL$ són semblants i de raó 1 : 2

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{LM} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{5}}{2}c = \frac{\sqrt{5}}{6}c$$

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}c, \overline{BN} = \frac{1}{4}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MBN$:

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{4}c$$

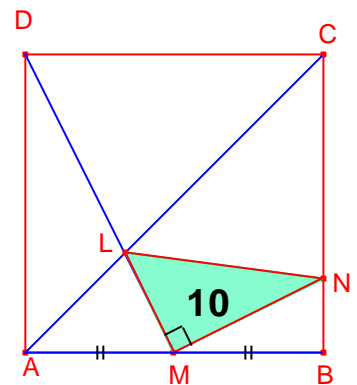
L'àrea del triangle ombrejat és 10:

$$S_{LMN} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{6}c \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}c = 10$$

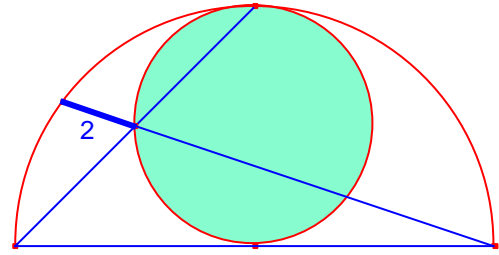
$$c^2 = 96$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = c^2 = 96$$



4995.- La figura està formada per una semicircumferència que conté una circumferència tangent a la semicircumferència i al seu diàmetre. Calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = 2r$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PO} = r$

K és el punt mig de la corda \overline{AT}

Siga M la projecció de K sobre el diàmetre \overline{AB}

$$\overline{AK} = \overline{KT} = r\sqrt{2}$$

$$\overline{OM} = \overline{PK} = r, \overline{MB} = 3r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle KMB$:

$$\overline{BK} = r\sqrt{10}$$

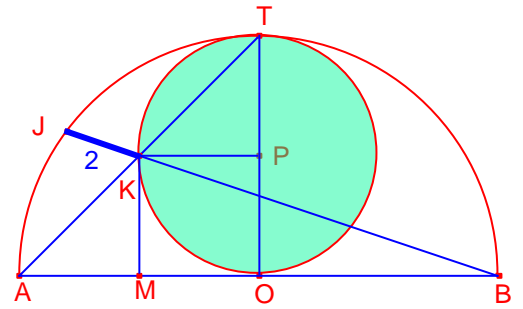
Aplicant la potència del punt K respecte de la semicircumferència:

$$2 \cdot r\sqrt{10} = r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2}$$

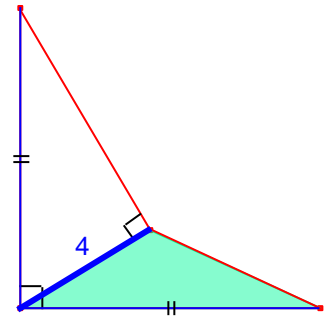
$$r = \sqrt{10}$$

L'àrea del cercle ombrejat és:

$$S_{\text{cercle}} = \pi r^2 = 10\pi$$



4996.- En la figura, calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Siga $\overline{BD} = 4$

Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = c$

Siga H la projecció de D sobre \overline{BC}

Siga $\overline{DH} = h$

Els triangles rectangles $\triangle BDA, \triangle HDB$ són semblants.

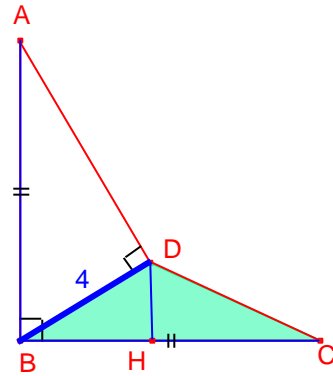
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{4} = \frac{4}{c}$$

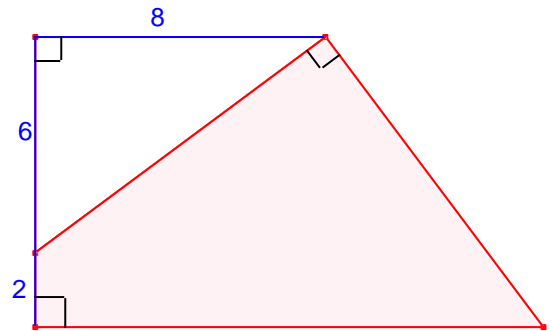
$$ch = 16$$

L'àrea del triangle $\triangle BCD$ és:

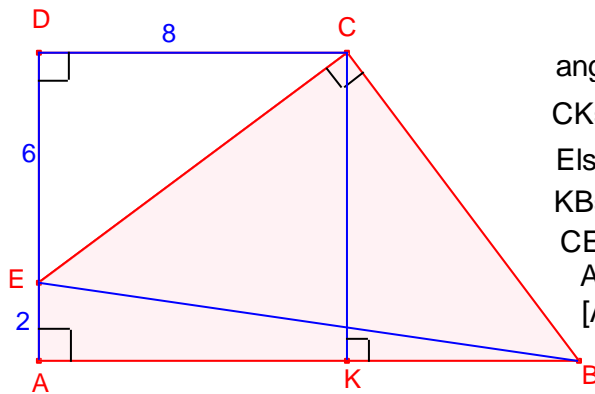
$$S_{BCD} = \frac{1}{2}ch = 8$$



4997.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



$$\text{angleDCE} = \text{angleKCB}$$

$$CK = 2 + 6 = 8$$

Els triangles CDE, CKB són iguals

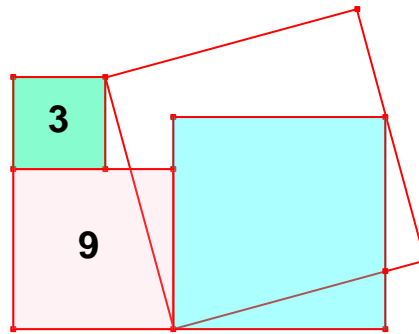
$$KB = DE = 6$$

$$CE = BC = 10$$

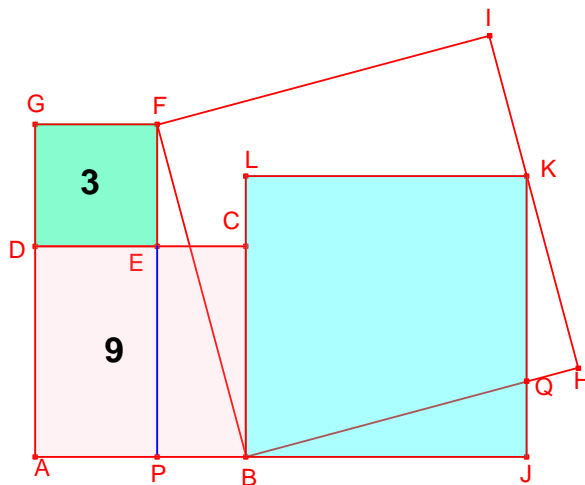
$$AB = 8 + 6 = 14$$

$$[ABCE] = [BCE] + [ABE] = 50 + 14 = 64$$

4998.- La figura està formada per quatre quadrats, dos d'ells d'àrees 3, 9
 Calculeu l'àrea del quadrat blau.



Solució:



$$AB=3, DE=\sqrt{3}$$

$$BF=2\cdot\sqrt{6}$$

$$BJ=c$$

Els triangles FPB, BJQ, KQH semblants

$$JQ=(2-\sqrt{3})\cdot c$$

$$QH=2\cdot\sqrt{6}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot c$$

$$QK=4\cdot(3+\sqrt{3})-4c$$

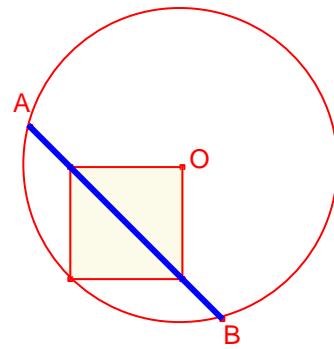
$$c=JQ+QH$$

$$c=(2-\sqrt{3})\cdot c+4\cdot(3+\sqrt{3})-4c$$

$$c=4$$

$$[BJKL]=c^2=16$$

4999.- La figura està formada per una circumferència i un quadrat.
 Si $\overline{AB} = 6$, calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga el quadrat $OJKL$ de costat $\overline{OJ} = c$

$$\overline{OK} = \overline{OB} = c\sqrt{2}, \overline{MB} = 3, \overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

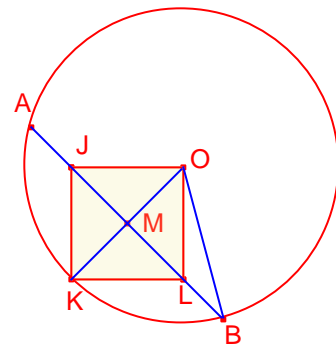
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\overset{\Delta}{M}B$:

$$2c^2 = 9 + \frac{1}{2}c^2$$

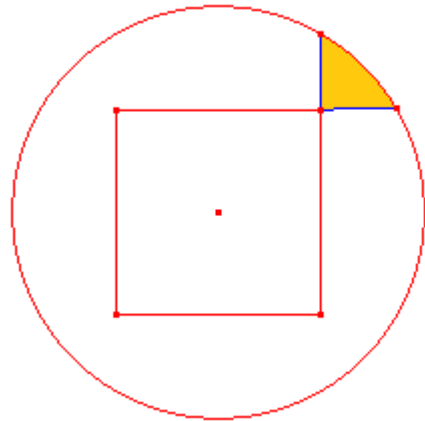
$$c^2 = 6$$

L'àrea del quadrat ombrejat és:

$$S_{OJKL} = c^2 = 6$$



5000.- La figura està formada per una circumferència i un quadrat concèntrics. Els costats del quadrat i el radi de la circumferència mesuren 10. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
 Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$ i centre O .
 Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = 10$
 Siga M el punt mig del costat \overline{CD}

$\angle OPM = 30^\circ, \angle OCP = 135^\circ$
 Aleshores, $\angle POQ = 30^\circ$

$\overline{PM} = 5\sqrt{3}$
 $\overline{CP} = 5(\sqrt{3} - 1)$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = S_{\text{sector } 30^\circ} - 2 \cdot S_{CPO} = \frac{1}{12} \pi 10^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} 5(\sqrt{3} - 1)5 = \frac{25}{3} \pi - 25(\sqrt{3} - 1)$$

