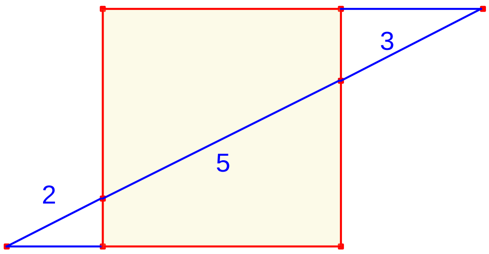
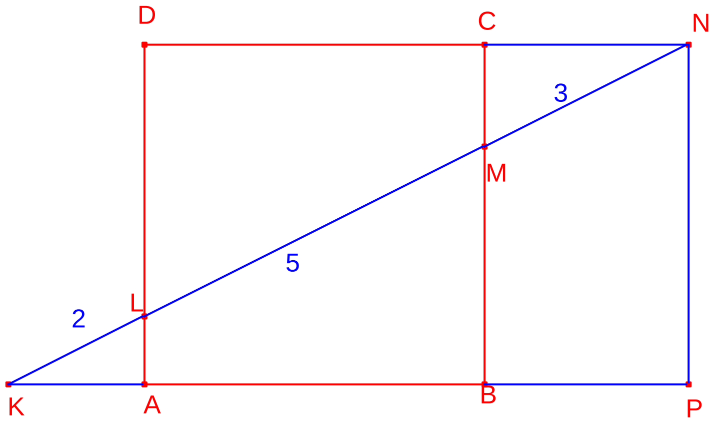
Problemes de Geometria per a l'ESO 501

5001.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:



AL+MN=LM

KA+CN=AB

AB=c

KP=2c, PM=c

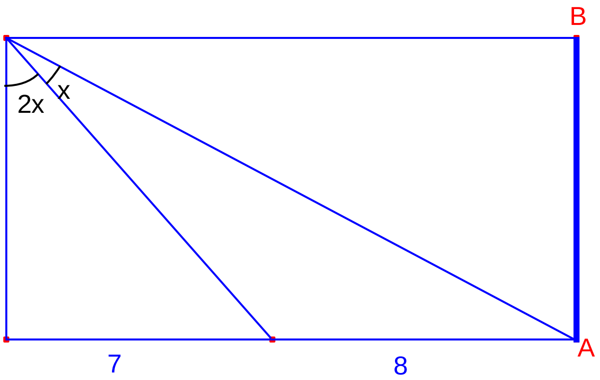
teorema Pitàgores KPN

$4c^2+c^2=10^2$

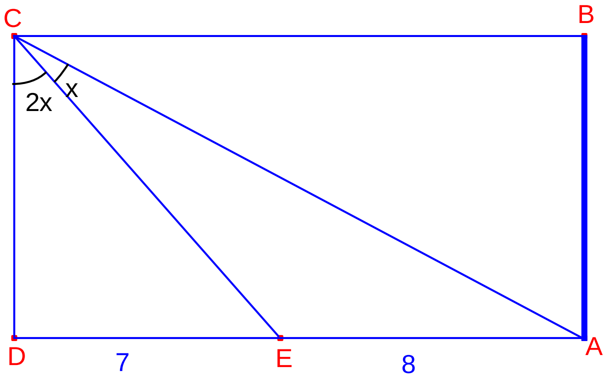
$c^2=20$

$[ABCD]=c^2=20$

5002.- En el rectangle de la figura, calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \overline{CD} = a, \overline{BC} = 15$



$$\tan 2x = \frac{7}{a}, \tan 3x = \frac{15}{a}$$

$$\frac{15}{a} = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \cdot \tan 2x} = \frac{\tan x + \frac{7}{a}}{1 - \frac{7}{a}\tan x}$$

$$8a = (105 + a^2) \cdot \tan x$$

$$\frac{7}{a} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Resolent l'equació:

$$\tan x = \frac{-a + \sqrt{49 + a^2}}{7}$$

$$8a = (105 + a^2) \cdot \frac{-a + \sqrt{49 + a^2}}{7}$$

$$a^3 + 161a = (105 + a^2)\sqrt{49 + a^2}$$

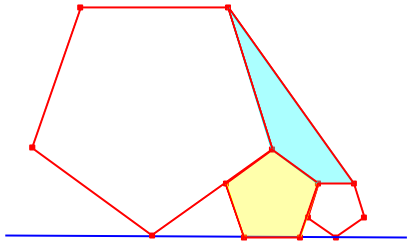
Elevant al quadrat i simplificant:

$$63a^4 + 4606a^2 - 540225 = 0$$

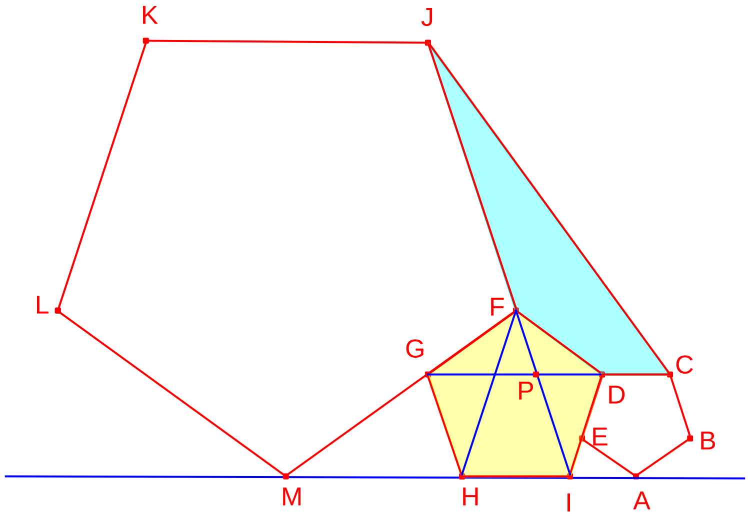
Resolent l'equació:

$$a = \overline{AB} = 3\sqrt{7}$$

5003.- La figura està formada per tres pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter blau i del pentàgon regular groc.



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el pentàgon regular $DFGHI$
$\overline{DI} = \overline{AC} = \Phi$
Siga el pentàgon regular $FJKLM$
$\overline{MH} = \Phi \cdot \overline{GH} = \Phi^2$
$\overline{MF} = \Phi^2 + \Phi = \Phi^3$

L'àrea del pentàgon regular groc és:

$$S_{DFGHI} = 2 \cdot S_{FGH} + S_{HIF} = 2 \cdot S_{FGH} + \Phi \cdot S_{FGH} = (2 + \Phi)S_{FGH}$$

$$S_{FGH} = \frac{1}{2}\Phi^2 \cdot \sin 108°$$

$$S_{DFGHI} = (2 + \Phi)S_{FGH} = (2 + \Phi)\frac{\Phi^2}{2} \cdot \sin 108° = \frac{3 + 4\Phi}{2} \cdot \sin 108°$$

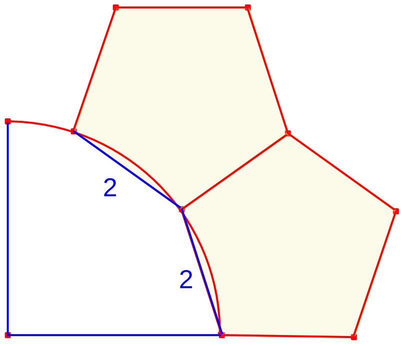
L'àrea blava és:

$$S_{DCJF} = S_{PCJ} - S_{PDF} = \frac{1}{2} \cdot 2(1 + \Phi^3) \cdot \sin 108 - \frac{1}{2}\sin 108° = \frac{3 + 4\Phi}{2} \cdot \sin 108°$$

La proporció d'àrees és:

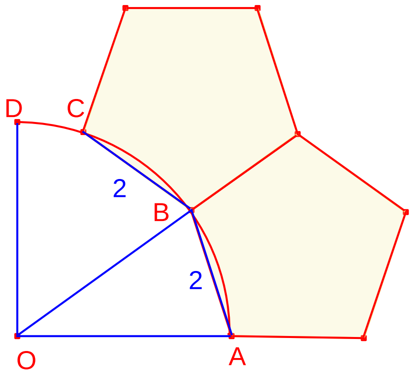
$$\frac{S_{DCJF}}{S_{DFGHI}} = 1$$

5004.- La figura està formada per dos pentàgons regulars de costat 2 i un quadrant.
Calculeu l'àrea del quadrat.

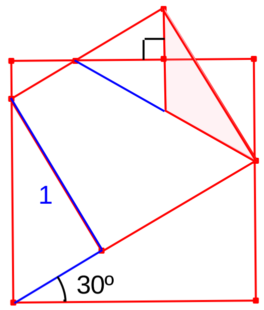


Solució:
$\angle OAB = \angle OBA = 72°$
$\overline{OA} = \Phi \cdot \overline{AB} = 2\Phi$

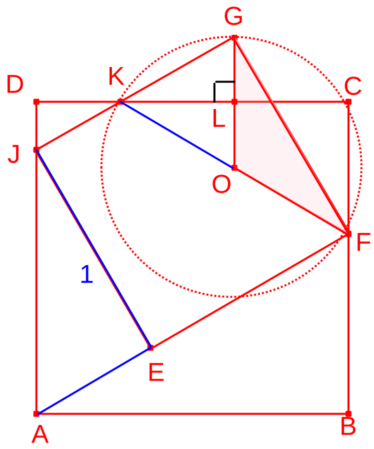
L'àrea del quadrant és:
$$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi \cdot (2\Phi)^2 = \pi\Phi^2$$



5005.- La figura està formada per dos quadrats.
El quadrat menut té costat 1.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat



Solució:



angleKCF=angleKGK=90º

FCGK cíclic

O punt mig FK centre de la circumferrència

FG // EJ, GK // AE

els triangles rectangles FGK, JEA igals

angleGFK=angleAJE=30º

angleCHG=30º

angleCKF=30º

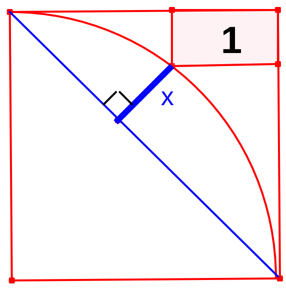
angeLGF=30º

angleKCG=angleGFK=30º

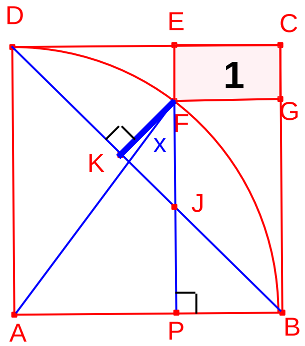
GL mediatriu CK

[OFG]=(1/2)[KGF]=sqrt(3)/12

5006.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i un rectangle d'àrea 1.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el rectangle $CEFG$ de costats $\overline{CE} = a, \overline{EF} = b, ab = 1$



$\overline{AF} = c, \overline{AP} = c - a, \overline{PF} = c - b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{APF}$:

$$c^2 = (c-a)^2 + \left(c - \frac{1}{a}\right)^2$$

Simplificant:

$$a^2c^2 - 2a(1+a^2)c + 1 + a^4 = 0$$

Resolent l'equació:

$$c = \frac{a^2 + \sqrt{2}a + 1}{a}$$

Siga $\overline{KF} = \overline{KJ} = x$
$\overline{FJ} = c - (a+b)$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{JKF}$:

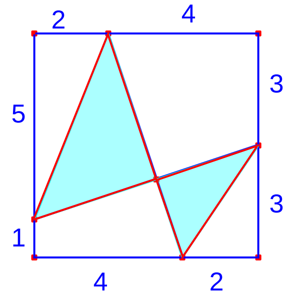
$$2d^2 = (c-a-b)^2$$

$$2c^2 = \left(\frac{a^2 + \sqrt{2}a + 1}{a} - a - \frac{1}{a}\right)$$

$$2d^2 = 2$$

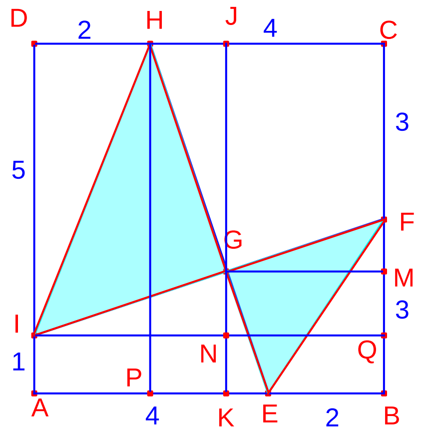
$$d = 1$$

5007.- En la figura, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HPE}, \overset{\Delta}{IQF}$ són iguals i els catets corresponents són perpendiculars.



Aleshores, $\overline{HE}, \overline{IF}$ són perpendiculars.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HPE}, \overset{\Delta}{ING}$ són semblants

Siga $\overline{GN} = k, \overline{IN} = 3k$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HPE}, \overset{\Delta}{GKE}$ són semblants

$\overline{KE} = 4 - 3k, \overline{KG} = k + 1 = 3(4 - 3k)$

Resolent l'equació:

$k = \dfrac{11}{10}$

$\overline{JG} = 5 - \overline{GK} = 5 - k$

$\overline{BK} = 6 - 3k$

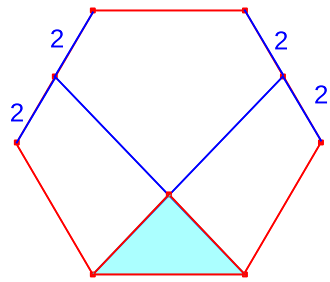
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - (S_{DIH} + S_{BEF} + S_{AEG} + S_{AIG} + S_{HCG} + S_{CFG}) =$$

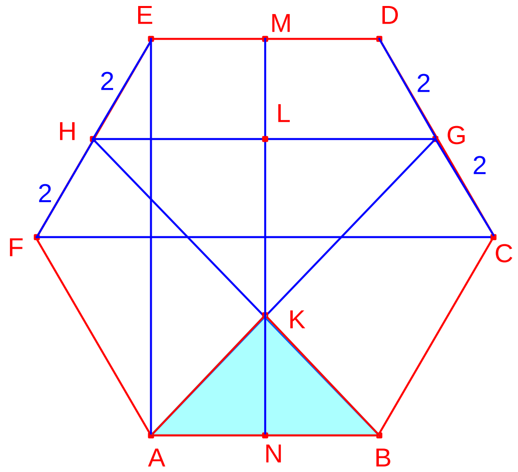
$$= 36 - \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4(1 + k) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3k + \frac{1}{2} \cdot 4(5 - k) + \frac{1}{2} \cdot 3(6 - 3k)\right) =$$

$$= 36 - (29 - 3k) = \frac{103}{10}$$

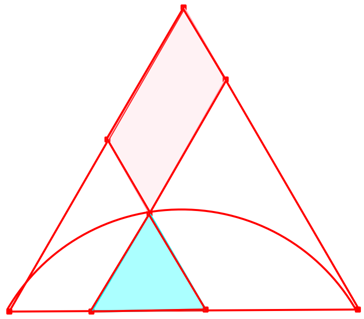
5008.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 4.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



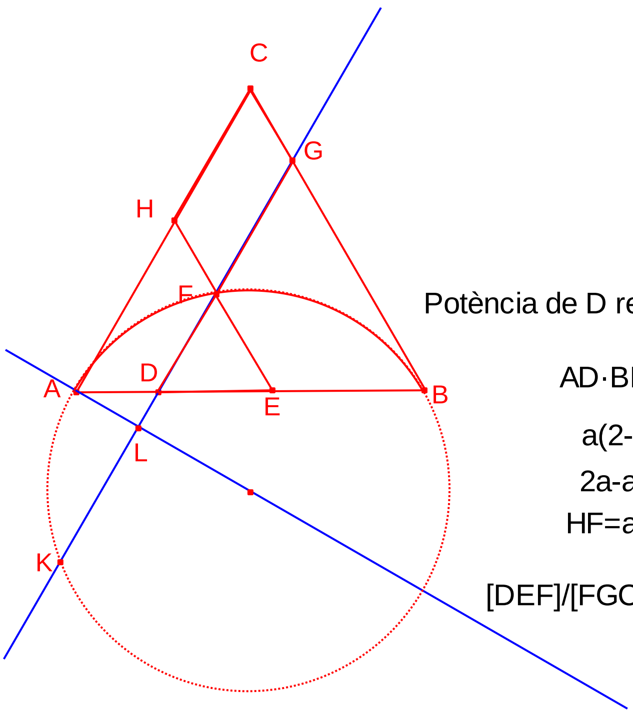
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 4$
$\overline{AE} = 4\sqrt{3}$
$\overline{GH}$ és paral·lela mitjana del trapezi FCDE
Aleshores:
$\overline{GH} = \dfrac{8+4}{2} = 6$
$\overline{ML} = \dfrac{1}{4}\overline{AE}, \overline{NL} = \dfrac{3}{4}\overline{AE}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{GHK}$ són semblants i de raó $2 : 3$
Aplicant e teorema de Tales:
$\overline{NK} = \dfrac{2}{5}\overline{NL}$
$\overline{NK} = \dfrac{3}{10}\overline{AE}$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$S_{ABK} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{3}{10} \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{12}{5}\sqrt{3}$



5009.- La figura està formada per un triangle equilàter que conté un paral·lelogram, un altre triangle equilàter i un arc circular que és tangent als seus vèrtexs de la base. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle equilàter blau i el paral·lelogram rosa.



Solució:



AB=2

AD=a, DE=c

DL=a/2

LK=LF=c+a/2

BD=2-a

Potència de D respecte de la circumferència

AD·BD = FE·KD

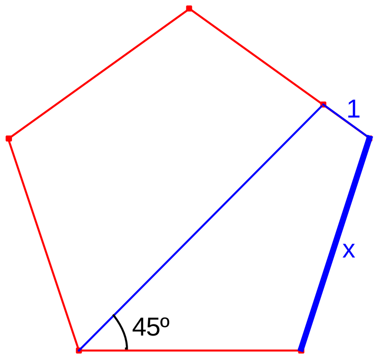
$a(2-a) = c(c+a)$

$2a-a^2-ac=c^2$

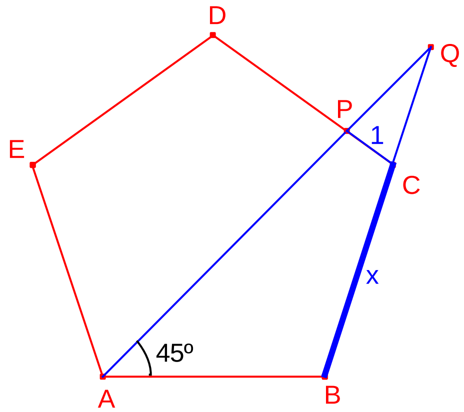
HF=a, FG=2-a-c

$[DEF]/[FGCH] = (c^2/2) / (a(2-a-c)) = 1/2$

5010.- La figura està formada per un pentàgon regular.
Calculeu la mesura del costat.



Solució:
Siga el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = x$
Siga $\angle PAB = 45°$
Les rectes AP, BC és tallen en el punt Q
Siga $\overline{CQ} = y$
$\angle AQB = 180° - (108° + 45°) = 27°$
$\angle PCQ = 180° - 108° = 72°$
$\angle QPC = 180° - (27° + 72°) = 81°$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$:
$$\frac{y}{\sin 81°} = \frac{1}{\sin 27°}$$
$$y = \frac{\sin 81°}{\sin 27°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABQ}$:
$$\frac{x + y}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 27°}$$
$$\frac{x + \frac{\sin 81°}{\sin 27°}}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 27°}$$

$$x = \frac{\sin 81°}{\sin 45° - \sin 27°} = \frac{\sin 81°}{2\sin 36° \cdot \sin 9°} \approx 3.9021$$