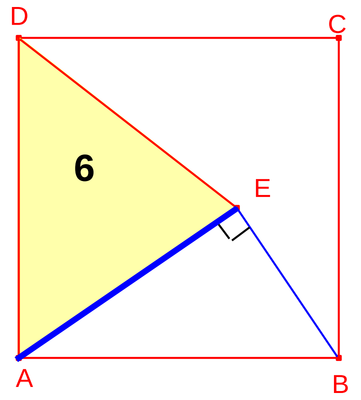
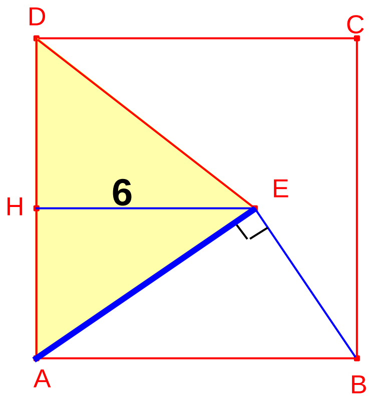
Problemes de Geometria per a l'ESO 502

5011.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$ i un triangle $\overset{\Delta}{AED}$ d'àrea 6 tal que $\angle AEB = 90°$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AE}$



Solució:



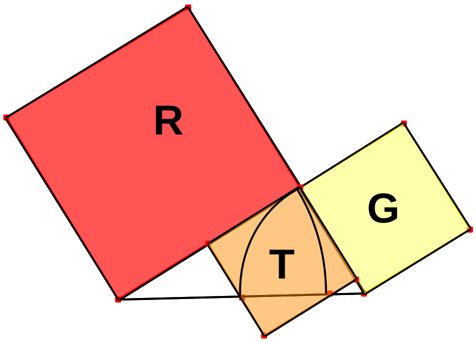
AB=c, EH=12/c

Els triangles AHE, BEA semblants

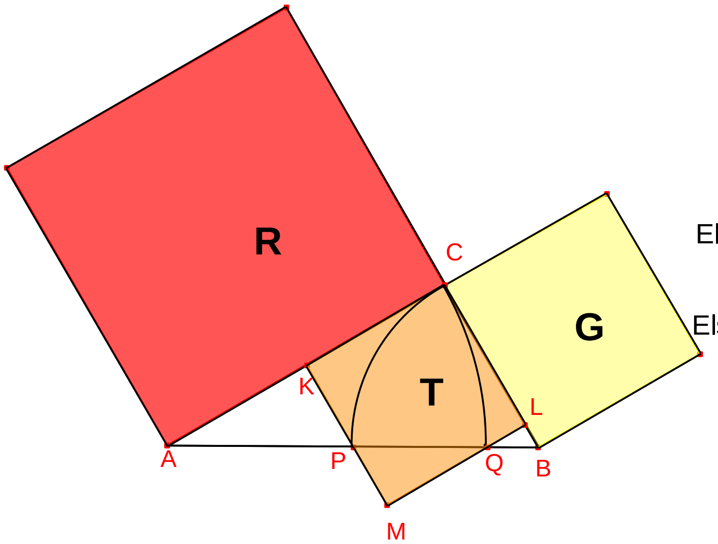
12/c/AE = AE/c

AE=2·sqrt(3)

5012.- La figura està formada per un triangle rectangle amb un quadrat roig i groc adjunt. Dos arcs circulars centrats en els vèrtexs del triangle.
Calculeu l'àrea del rectangle taronja en termes dels quadrats roig i groc.



Solució:



BC=a, AC=b

CL=c, CK=c'

BL=a-c

Els triangles QLB, ACB semblants

$c=ab/\text{sqrt}(a^2+b^2)$

Els triangles AKP, ACB semblants

$c'=ab/\text{sqrt}(a^2+b^2)$

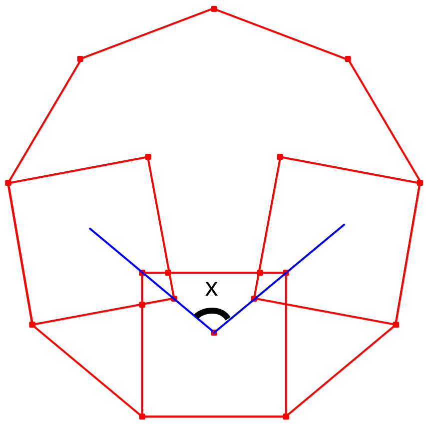
c=c'

DKML quadrat

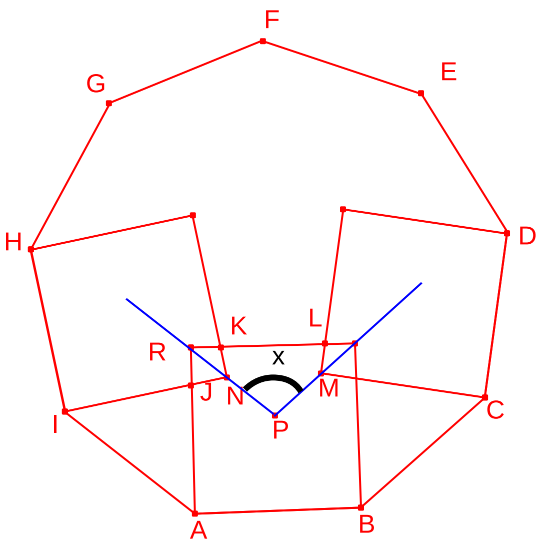
$c^2=a^2b^2/(a^2+b^2)$

$T = R\cdot G/(R+T)$

5013.- La figura està formada per un polígon regular de nou costats i tres quadrats. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angle IAJ=angleAIJ=50º

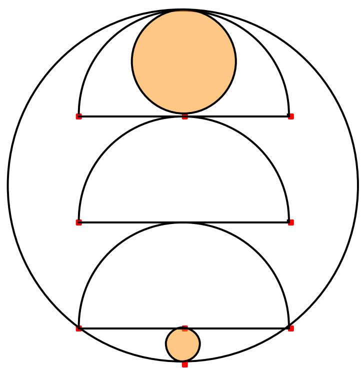
angleRJN=80º, angleRKN=100º

angleKNP=140º

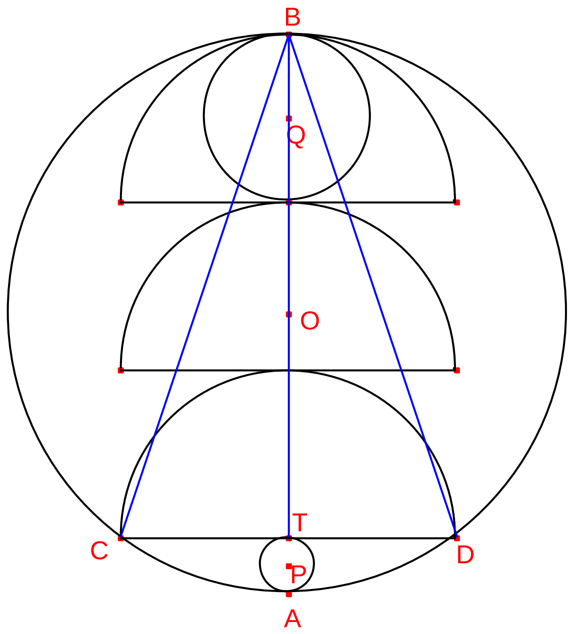
angleKNL=80º

x=540º-(2·80º+2·140º)=100º

5014.- La figura està formada per una circumferència que conté tres semicercles iguals de diàmetres paral·lels i dues circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total del cercle exterior.

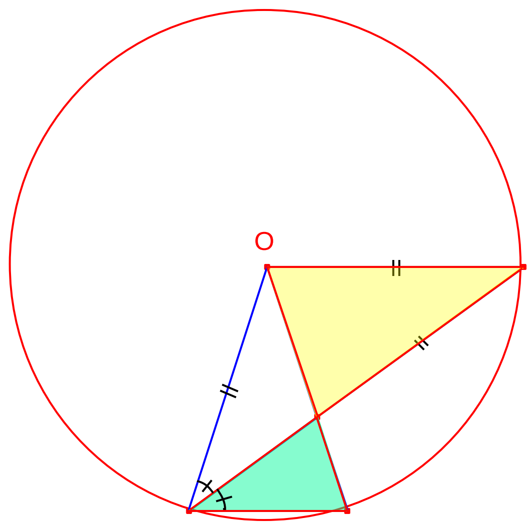


Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre T i radi $\overline{TC} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QB} = \frac{1}{2}r$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PA} = s$



$\overline{TB} = 3r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTB}$
$\overline{BC} = r\sqrt{10}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:
$$S_{BCD} = \frac{1}{2}2r \cdot 3r = \frac{2r \cdot r\sqrt{10} \cdot r\sqrt{10}}{4R}$$
Resolent l'equació:
$$R = \frac{5}{3}r$$
$$2s = 2R - 3r$$
$$s = \frac{1}{6}r$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{2}r\right)^2}{R^2} = \frac{\frac{1}{36}r^2 + \frac{1}{4}r^2}{\frac{25}{9}r^2} = \frac{1}{10}$$

5015.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea del triangle blau i l'àrea del triangle verd.



Solució:

Siga $\alpha = \angle OAC = \angle CAB$

$\overline{OA} = \overline{OB}$

$\angle ABO = 2\alpha$

$\angle OCD = \angle COD = 180° - 3\alpha$

$\overline{OA} = \overline{OD}$

Aleshores, $\angle ADO = \angle OAD = \alpha$

$2(180 - 3\alpha) + \alpha = 180°$

Resolent l'equació:

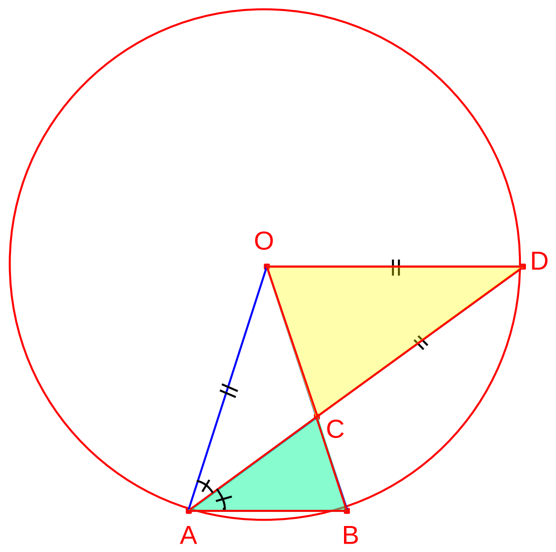
$\alpha = 36°$

$\angle ABC = \angle ACB = 72°$

$\overline{AB} = \overline{AC} = 1, \overline{OA} = \overline{OD} = \overline{CD} = \Phi$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{CDO}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\Phi \cdot \Phi \cdot \sin 36°}{\frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin 36°} = \Phi^2$$

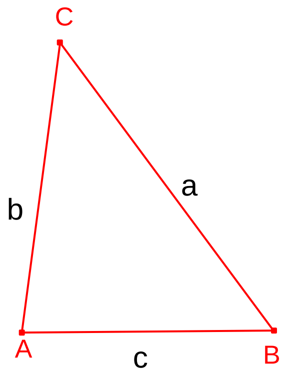


5016.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a, b, c \in \mathbb{N}$

$p = \dfrac{a+b+c}{2} = 3033$

$a(p-a)(c-b) + b(p-b)(a-c) + c(p-c)(b-a)$ és un nombre primer

Calculeu els costats del triangle$\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

$a(p-a)(c-b) + b(p-b)(a-c) + c(p-c)(b-a)$

$a(3033-a)(c-b) + b(3033-b)(a-c) + c(3033-c)(b-a)$

Factoritzant:

$(b-c)(a-c)(a-b)$ nombre primer

Suposem $a > b > c$

Dos dels factors són la unitat:

Si $a-b=1, a-c=1$

Aleshores, $b=c$ la qualcosa és absurda

Si

$a-b=1, b-c=1$

$b=1+c, a=2+c$

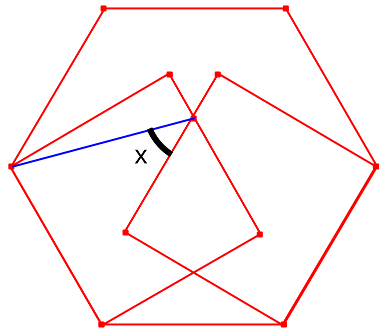
$\dfrac{2+c+1+c+c}{2} = 3033$

$(b-c)(a-c)(a-b) = 2$ nombre primer

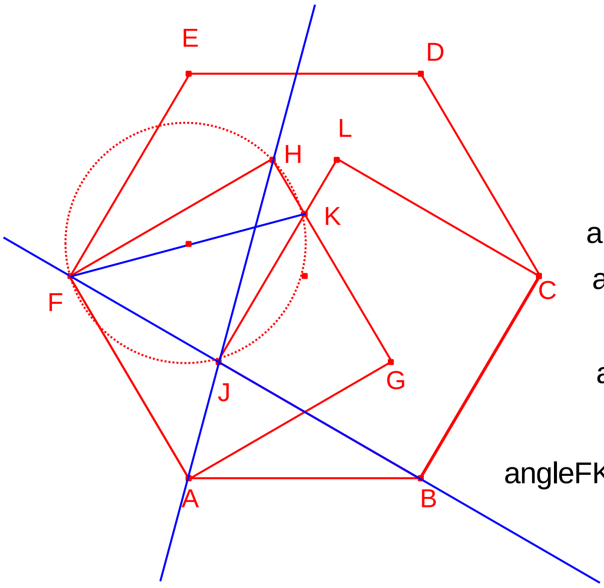
Aleshores,

$a = 2023, b = 2022, c = 2021$ o qualsevol de les permutacions

5017.- La figura està formada per un hexàgon regular i dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleABJ=30º

B, J, F alineats

angleJAB=angleAJB=75º

angleFAJ=120º-75º=45º

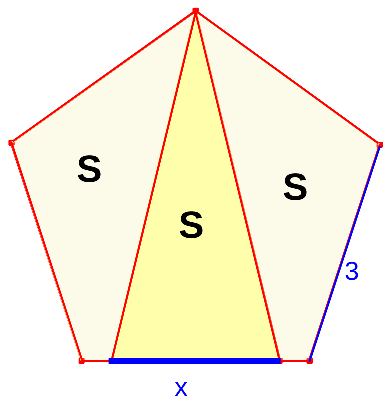
A, J, H alineats

angleFJK=angleFHK=90º

FJKH cíclic

angleFKJ=angleFHJ=45º

5018.- La figura està formada per un pentàgon regular de costat 3 que s'ha dividit en tres parts d'igual àrea S. Calculeu la mesura del segment x



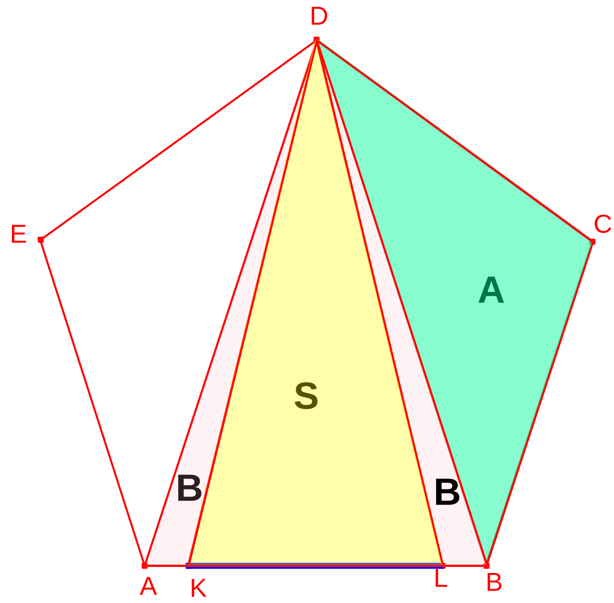
Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 3$

Siguen $S = S_{AKDE} = S_{KLD} = S_{LBCD}$
Siga $\overline{KL} = x$

$\overline{LB} = \dfrac{3-x}{2}$

Siga $A = S_{BCD}, B = S_{LBD} = S_{AKD}$

$S_{ABD} = \Phi \cdot S_{BCD}$



$A + B = S$

$2B + S = \Phi \cdot A$

$\begin{cases} A + B = S \\ \Phi A + 2B = S \end{cases}$

Resolent el sistema

$\dfrac{S}{B} = \Phi(2 + \Phi)$

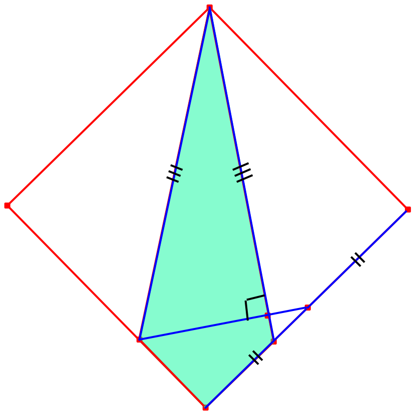
$\dfrac{S}{B} = \dfrac{2x}{3-x}$

$\dfrac{2x}{3-x} = \Phi(2+\Phi) = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

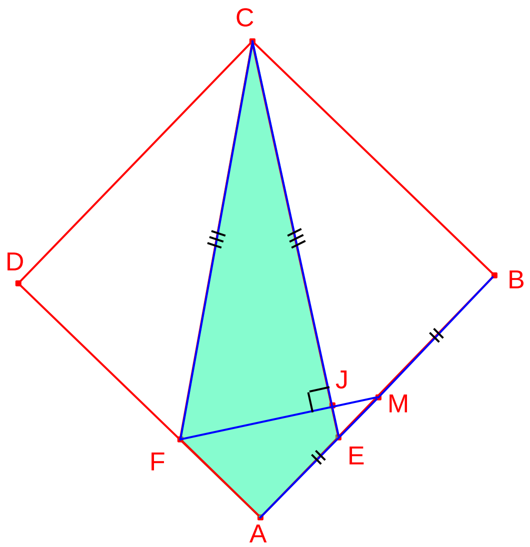
Resolent l'equació:

$x = \sqrt{5}$

5019.- La figura està formada per un quadrat que conté un cometa inscrit.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cometa ombrejat i l'àrea del quadrat.



Solució:



$AB=2$

$AF=AE=d$

Els triangles CBE, FAM semblants

$d/1=(2-d)/2$

$d=2/3$

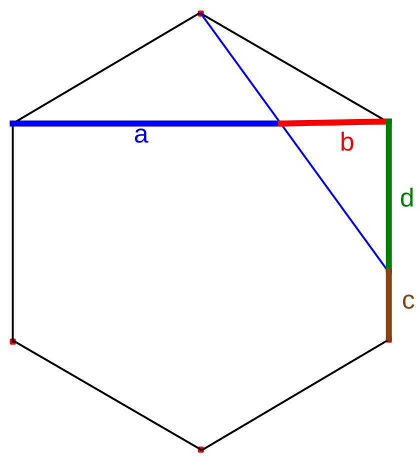
$[AECF]=2^2-(2-d)2=4/3$

$[ABCD]=2^2$

$[AECF]/[ABCD]=1/3$

5020.- La figura està formada per un hexàgon regular.
Calculeu:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$



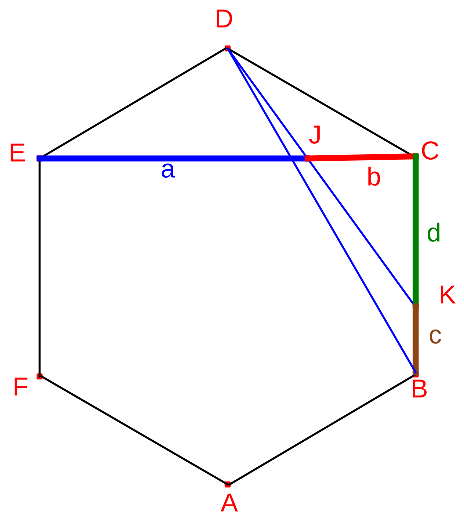
Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB}=1$

$c+d=1, a+b=\sqrt{3}$

Siga $\overline{DK}=x, \overline{JK}=y, \overline{DJ}=z$

$y=\sqrt{b^2+d^2}$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DJC}$:

$$\frac{1}{\frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}}=\frac{z}{\frac{1}{2}}$$

$$z=\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{2d}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DBK}$:

$x^2=c^2+3-3c=(1-d)^2+2-3(1-d)=d^2+d+1$

$y+z=x$

$$\sqrt{b^2+d^2}+\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{2d}=\sqrt{d^2+d+1}$$

Elevant al quadrat:

$$(b^2+d^2)\frac{4d^2+4d+1}{4d^2}=d^2+d+1$$

Resolent l'equació:

$$b=\frac{d\sqrt{3}}{2d+1}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{\sqrt{3}-b}{b}-\frac{1-d}{d}=\frac{\sqrt{3}}{b}-\frac{1}{d}=\frac{\sqrt{3}(2d+1)}{d\sqrt{3}}-\frac{1}{d}=2$$