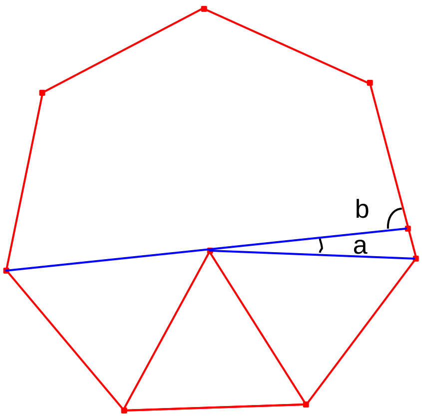
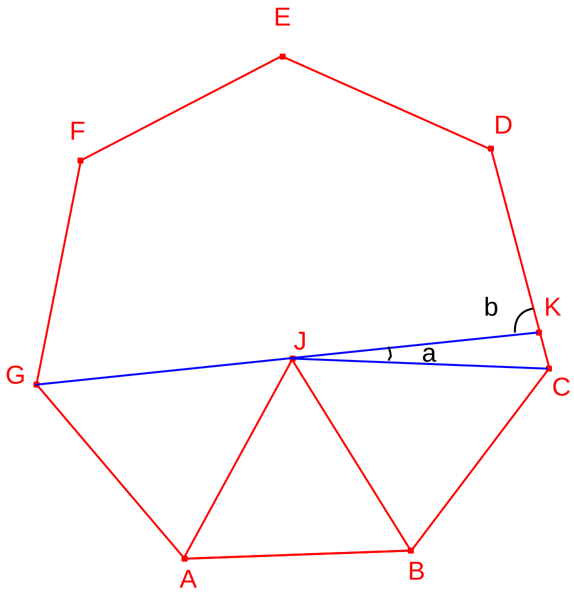
5021.- La figura està formada per un heptàgon regular i un triangle equilàter.
Calculeu $a + b$



Solució:



angleABC=900º/7

angleGAJ=480º/7

angleAGJ=angleAJG=390º/7

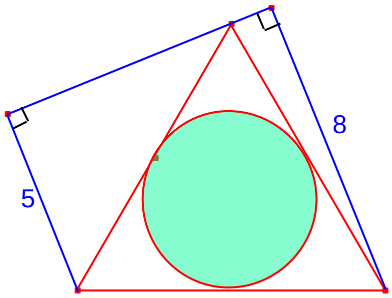
a=180º-(2·390º/7+60º)=60º/7

angleFGK=510º/7

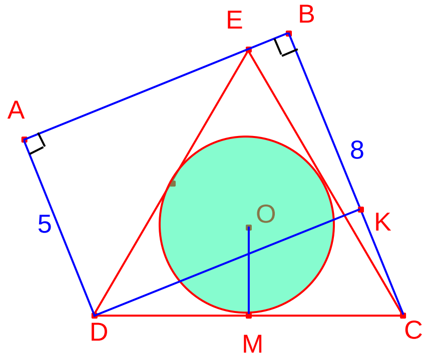
b=540º-(3·900º/7+510º/7)=570º/7

a+b=90º

5022.- La figura està formada per un trapezi rectangle que conté un triangle equilàter. Calculeu l'àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter



Solució:



Siga el trapezi rectangle $ABCD$ $A = B = 90°, \overline{AD} = 5, \overline{BC} = 8$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DCE}$ de costat $\overline{AB} = v$

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$

Siga K la projecció de D sobre el costat $\overline{BC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{CBE}$:

$\overline{AE} = \sqrt{c^2 - 25}, \overline{BE} = \sqrt{c^2 - 64}$

$\overline{DK} = \overline{AB} = \sqrt{c^2 - 25} + \sqrt{c^2 - 64}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKC}$:

$3^2 + \left(\sqrt{c^2 - 25} + \sqrt{c^2 - 64}\right)^2 = c^2$

$80 - c^2 = 2\sqrt{c^4 - 89c^2 + 1600}$

Elevant al quadrat i simplificant:

$3c^4 - 196c^2 = 0$

$c = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

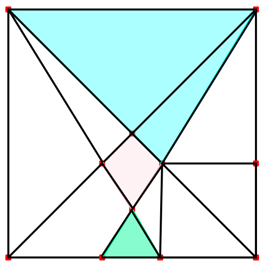
El radi de de la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{DCE}$ és:

$\overline{OM} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}c = \dfrac{7}{3}$

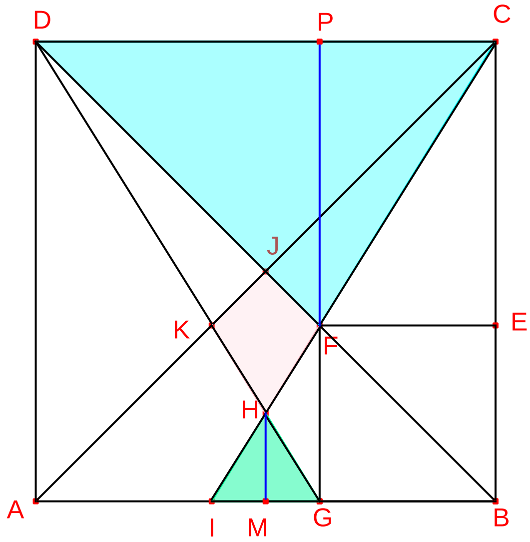
L'àrea del cercle és:

$S_{cercle} = \dfrac{49}{9}\pi$

5023.- La figura està formada per dos quadrats, un triangle isòsceles verd, un cometa rosa i un triangle blau.
Calculeu la proporció d'àrees $Blau : rosa : verd$

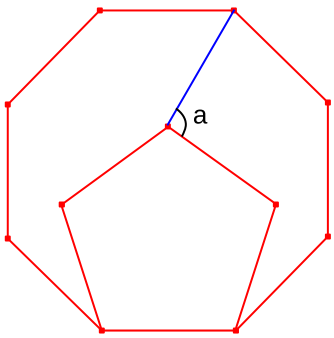


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre J i costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = c$
$\overline{BI} = 1 - c$

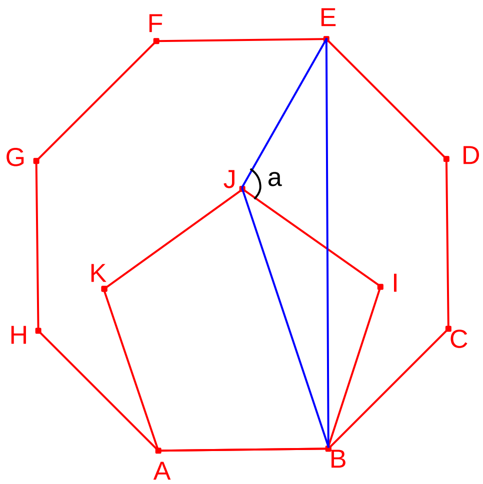


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IBC}, \overset{\Delta}{FEC}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1-c}{c} = \frac{1}{1-c}$$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$\overline{IG} = \overline{KF} = 1 - 2c = \sqrt{5} - 2$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IMH}, \overset{\Delta}{IGF}$ són semblants i de raó $1 : 2$
$$\overline{MH} = \frac{1}{2}c = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$
$$\overline{FP} = 1 - c = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
L'àrea del triangle verd és:
$$S_{IGH} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-2\right)\frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{5\sqrt{5}-11}{8}$$
L'àrea del triangle blau és:
$$S_{CDF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$\overline{MJ} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{HJ} = \overline{MJ} - \overline{MH} = \frac{1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
L'àrea del cometa rosa és:
$$S_{HFJK} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-2\right)\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{8}$$
La proporció entre l'àrea rosa i l'àrea verda és:
$$\frac{S_{HFJK}}{S_{IGH}} = \frac{\frac{7-3\sqrt{5}}{8}}{\frac{5\sqrt{5}-11}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
La proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda és:
$$\frac{S_{HFJK}}{S_{IGH}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{5\sqrt{5}-11}{8}} = 7 + 3\sqrt{5}$$
Les proporcions que cerquen són:
$$Blau : rosa : verd = 7 + 3\sqrt{5} : \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$$

5024.- La figura està formada per un octògon regular i un pentàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle a



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el pentàgon regular $ABIJK$.
Siga $a = \angle EJI$
$\angle EJB = a + 36°$
$\angle JBE = 90° - 72° = 18°$
$\overline{BE} = 1 + \sqrt{2}, \overline{BJ} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BEJ}$

$$\overline{JE}^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 3 + 2\sqrt{2} - \left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\cos 18°$$

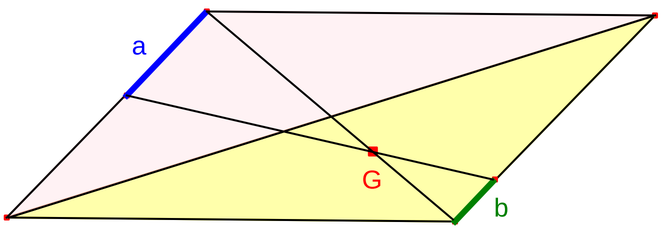
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BEJ}$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sin(a+36°)} = \frac{\overline{JE}}{\sin 18°}$$

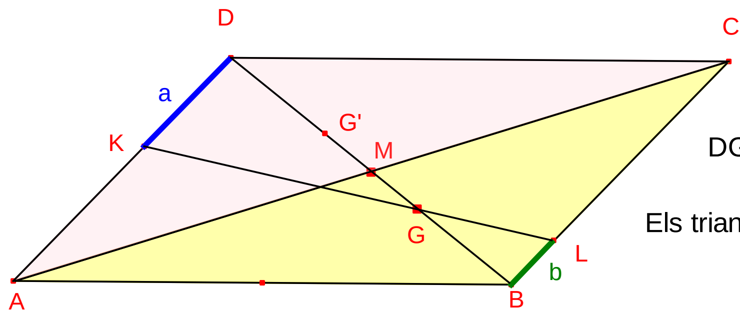
$$a + 36° = 180° - \arcsin\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 18°}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 3 + 2\sqrt{2} - \left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\cos 18°}}\right)$$

$$a \approx 96.26560259°$$

5025.- La figura està formada per dos triangles iguals.
Una recta passa pel baricentre del triangle groc.
Calculeu la proporció $a : b$



Solució:



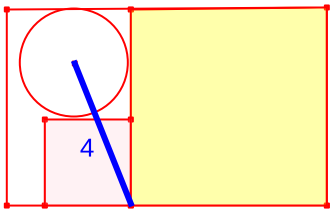
G' baricentre ACD

DG'=2k, G'M=k, GM=k, BG=2k

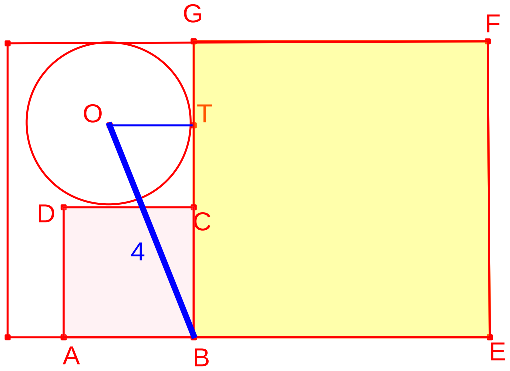
Els triangles BLG, CKG són semblants

a/b = 4k/(2k=2

5026.- La figura està formada per dos quadrats ombrejats i una circumferència dins d'un quadrat. Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.

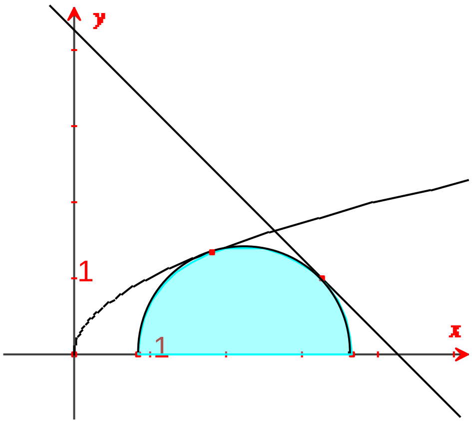


Solució:

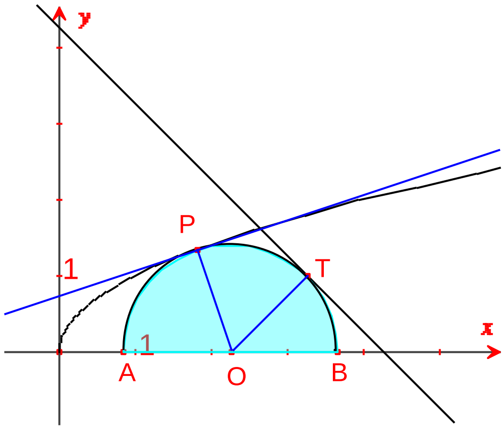


Siga el quadrat de $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga $\overline{OB} = 4$
$\overline{CG} = b - a, \overline{OT} = \overline{GT} = \frac{1}{2}(b-a), \overline{BT} = b - \overline{GT} = \frac{1}{2}(a+b)$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTO}$:
$16 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab)$
$a^2 + b^2 = 32$
La suma de les àrees és:
$S = a^2 + b^2 = 32$

5027.- En la figura, la semicircumferència té el diàmetre en l'eix d'abscisses i és tangent a la recta $4x + 4y = 17$ i a la paràbola $y = \sqrt{x}$
Calculeu l'àrea del semicercle.

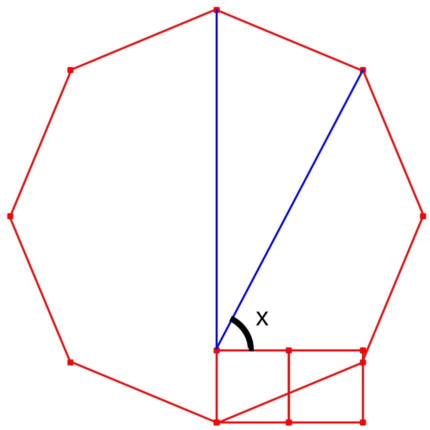


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$
Siga $O(a, 0)$
$\overline{OP} = \overline{OT} = r$
$\overline{OP}$ és perpendicular a la recta tangent a la paràbola en el punt P.
$\overline{OT}$ és perpendicular a la recta $4x + 4y - 17 = 0$
L'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $P(x_o, \sqrt{x_o})$ és:



$$r_t \equiv y = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}(x - x_o) + \sqrt{x_o}$$
$$y = \frac{\sqrt{x_o}}{2x_o}x + \frac{1}{2}\sqrt{x_o}$$
La recta OP té pendent:
$$\frac{\sqrt{x_o}}{x_o - a}$$
La recta OP i la recta tangent són perpendiculars.
Aleshores:
$$\frac{\sqrt{x_o}}{x_o - a} \cdot \frac{\sqrt{x_o}}{2x_o} = -1$$
Simplificant:
$$x_0 = a - \frac{1}{2}$$
La distància del centre O a la recta $4x + 4y - 17 = 0$ és igual a la distància del centre O al punt P:
$$r = \left|\frac{4a - 17}{4\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + a - \frac{1}{2}}$$
Elevant al quadrat i simplificant:
$$16a^2 - 168a + 297 = 0$$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{9}{4}$$
El radi del semicercle és:
$$r = \sqrt{2}$$
L'àrea del semicercle és:
$$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi$$

5028.- La figura està formada per un octògon regular i dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga $x = \angle DJK = \angle MDJ$

$\overline{MD} = \cos\frac{45°}{2}, \overline{ME} = \sin\frac{45°}{2}$

$\overline{AJ} = \frac{1}{2}\overline{MD} = \frac{1}{2}\cos\frac{45°}{2}$

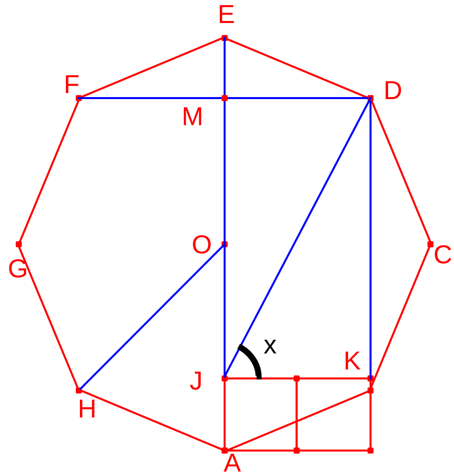
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{HAO}$:

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\frac{145°}{2}} = \frac{1}{\sin 45°}$$

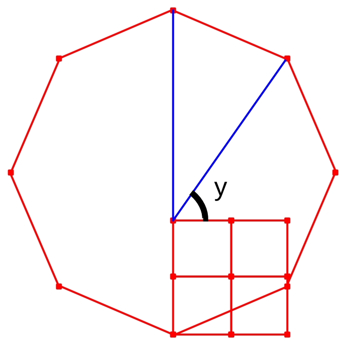
$$\overline{OE} = \overline{OA} = \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°}$$

$$\overline{JE} = 2\cdot\overline{OA} - \overline{AJ} - \overline{ME} = 2\cdot\frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°} - \frac{1}{2}\cos\frac{45°}{2} - \sin\frac{45°}{2}$$

$$x = \arctan\frac{\overline{JE}}{\overline{MD}} = \arctan\frac{2\cdot\frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°} - \frac{1}{2}\cos\frac{45°}{2} - \sin\frac{45°}{2}}{\cos\frac{45°}{2}} \approx 62°\,25'2"$$



5029.- La figura està formada per un octògon regular i quatre quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle y



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga $x = \angle DJK = \angle MDJ$

$$\overline{MD} = \cos\frac{45°}{2}, \overline{ME} = \sin\frac{45°}{2}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{HAO}$:

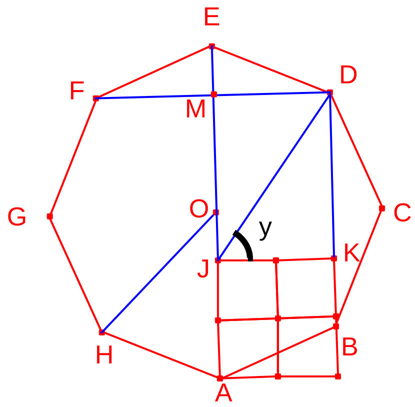
$$\frac{\overline{OA}}{\sin\frac{145°}{2}} = \frac{1}{\sin 45°}$$

$$\overline{OE} = \overline{OA} = \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°}$$

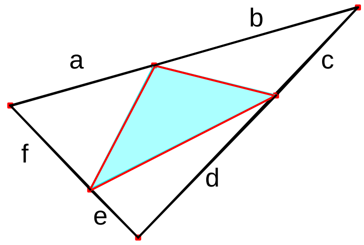
$$\overline{JE} = 2 \cdot \overline{OA} - \overline{MD} - \overline{ME} = 2 \cdot \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°} - \cos\frac{45°}{2} - \sin\frac{45°}{2}$$

$$y = \arctan\frac{\overline{JE}}{\overline{MD}} = \arctan\frac{2 \cdot \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin 45°} - \cos\frac{45°}{2} - \sin\frac{45°}{2}}{\cos\frac{45°}{2}}$$

$$\approx 54°\,44'8''$$



5030.- La figura està formada per un triangle que té inscrit un altre triangle ombrejat.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del triangle exterior en funció de les mesures dels segments a, b, c, d, e, f



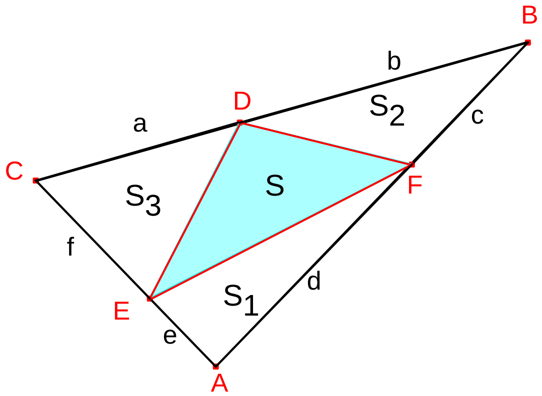
Solució:

Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFE}$.

Siga S_2 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDF}$.

Siga S_3 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CED}$.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.



La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot de \cdot \sin A}{\frac{1}{2} \cdot (c+d)(e+f) \cdot \sin A}$$

$$S_1 = \frac{de}{(c+d)(e+f)} S_{ABC}$$

Anàlogament:

$$S_2 = \frac{bc}{(a+b)(c+d)} S_{ABC}, S_3 = \frac{af}{(a+b)(e+f)} S_{ABC}$$

L'àrea del triangle ombrejat és:

$$S = S_{ABC} - \left(\frac{de}{(c+d)(e+f)} S_{ABC} + \frac{bc}{(a+b)(c+d)} S_{ABC} + \frac{af}{(a+b)(e+f)} S_{ABC}\right)$$

Simplificant:

$$\frac{S}{S_{ABC}} = \frac{ace + bdf}{(a+b)(c+d)(e+f)}$$