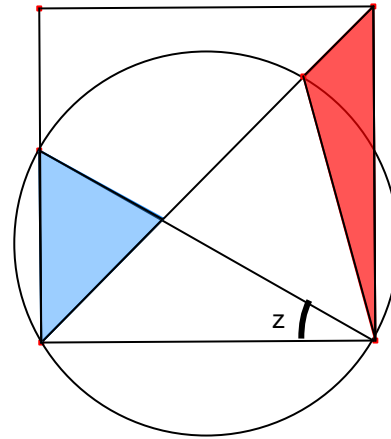
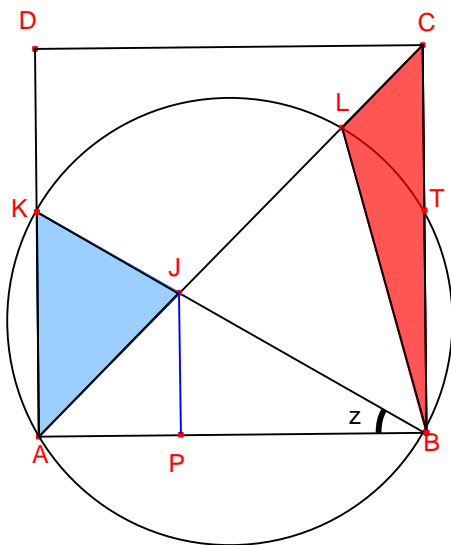


Problemes de Geometria per a l'ESO 504

5031.- La figura està formada per un quadrat i una circumferència.  
 Les àrees dels triangles blau i roig són iguals.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $z$

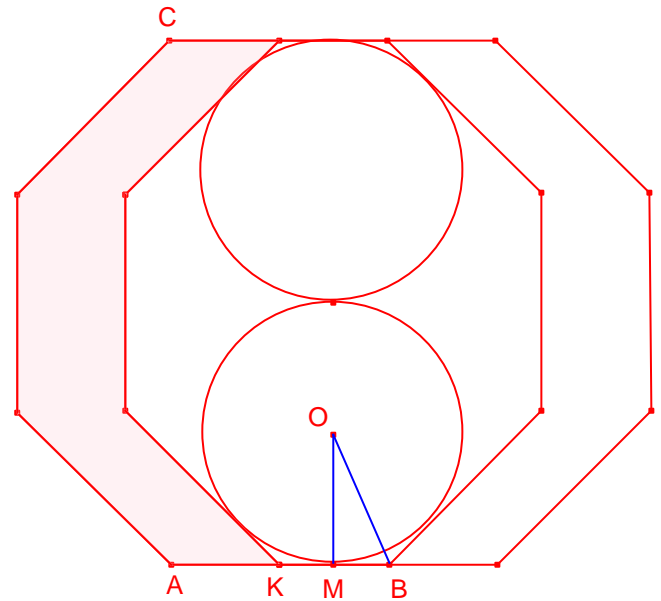
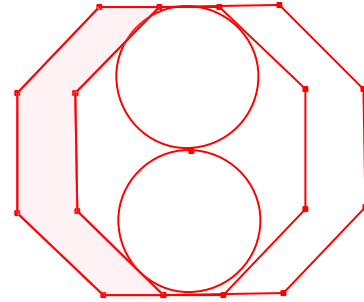


Solució:



$AB=c, AK=a$   
 $CL=x, AJ=y$   
 Potència C respecte circumferència  
 $x \cdot c \cdot \sqrt{2} = (c-a)c$   
 $x = (c-a) \cdot \sqrt{2} / 2$   
 $[AJK] = [CLB]$   
 $xc = ay$   
 $y = c(c-a) / a \cdot \sqrt{2} / 2$   
 Els triangles rectangles JPB, KAB semblants  
 $y \cdot \sqrt{2} / 2 / a = c / (a+c)$   
 $a/c = \tan z = \sqrt{3} / 3$   
 $z = 30^\circ$

5032.- La figura està formada per dos octògons regulars iguals sobreposats i dues circumferències iguals tangents.  
 Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:

Siga  $\overline{AB} = 1$ , costat de l'octògon regular.

$$\overline{AC} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{4} \overline{AC} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{OM}} = \tan \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\overline{MN} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{4}$$

$$\overline{AK} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{MB} = \frac{1}{2}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = \overline{AK} \cdot \overline{AC} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

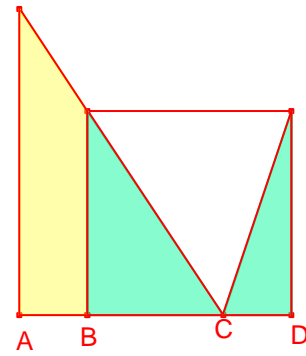
L'àrea total és igual a l'àrea d'un octògon regular de costat 1 més l'àrea ombrejada.

$$S_{\text{Total}} = S_{\text{octògon}} + S_{\text{ombrejada}} = (1 + \sqrt{2})^2 - 1^2 + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}(1 + \sqrt{2})$$

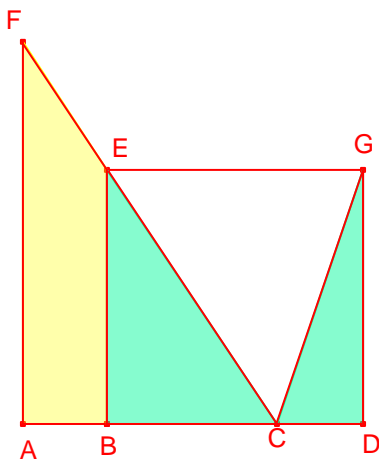
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{\text{Total}}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{2}(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{5}$$

5033.- Calculeu l'àrea de color verd saben que  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ,  $2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}$  i que l'àrea de color groc és 75



Solució:



$$\begin{aligned} AB &= CD = a, \\ BC &= 2a \\ BE &= DG = b \end{aligned}$$

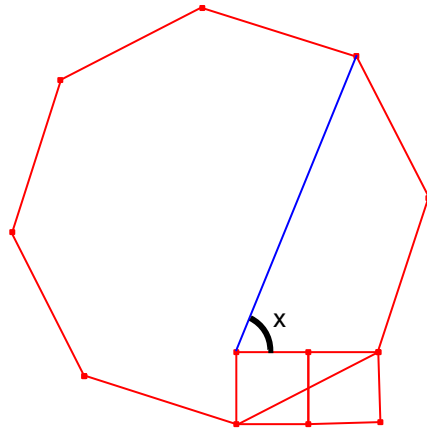
Els triangles FAC, EBC semblants de raó 3:2  
 $AF = (3/2)b$

$$[ABEF] = 75 = (5/4)ab$$

$$ab = 60$$

$$[\text{verda}] = (1/2) \cdot 3a \cdot b = 90$$

5034.- La figura està formada per un octògon regular i dos quadrats.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $x$



Solució:

Siga l'octògon regular  $ABCDEFGH$  de de centre  $O$  i costat  $\overline{AB} = 1$

$$\overline{AD} = 1 + \sqrt{2}$$

Siga  $\overline{AJ} = a, \overline{BJ} = 2a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AJB$ :

$$a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Siga  $x = \angle DJB$

Siga  $\alpha = \angle JBA$

$\angle JAD = 45^\circ - \alpha$

Siga  $\overline{JD} = d$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AJD$ :

$$d^2 = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{5} - 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

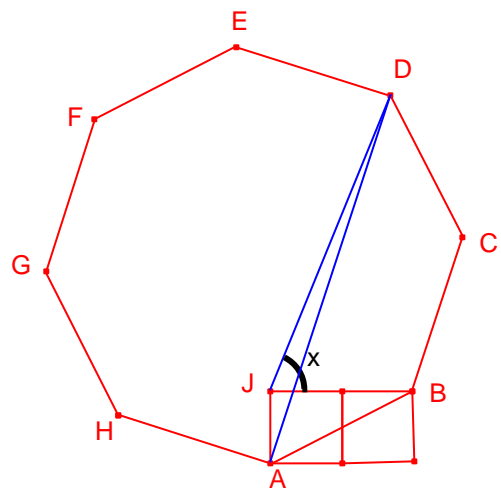
$$d^2 = \frac{10 + 7\sqrt{2}}{5}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle AJD$ :

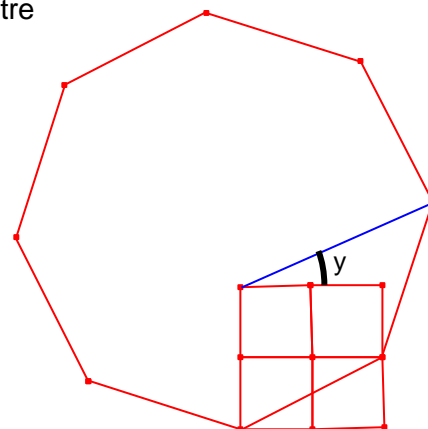
$$\frac{\sqrt{\frac{10 + 7\sqrt{2}}{5}}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\cos x}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

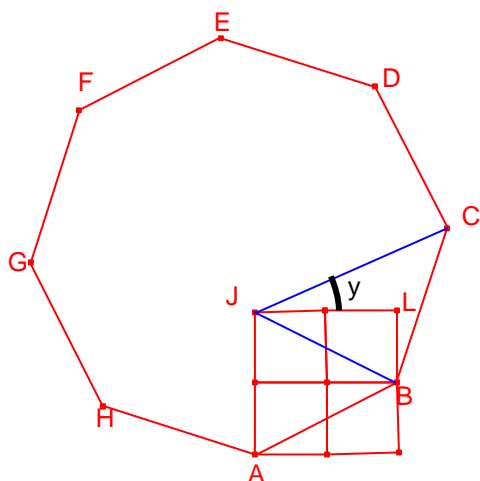
$$x = \frac{1}{2} 135^\circ$$



5035.- La figura està formada per un octògon regular i quatre quadrats.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $y$

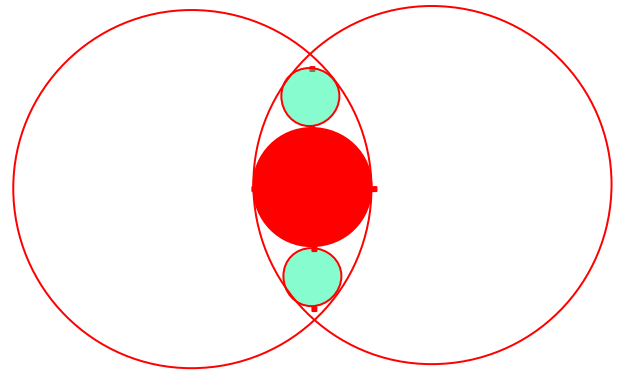


Solució:



$$\begin{aligned}
 y &= \text{angle } CJL \\
 BJ &= BC = AB \\
 a &= \text{angle } LJB = MBA \\
 2(a+y) + 135^\circ - 2a &= 180^\circ \\
 y &= 45^\circ/2
 \end{aligned}$$

5036.- La figura està formada per cinc circumferències.  
 Les dues verdes són iguals  
 Les dues grans són iguals.  
 El radi de de la circumferència gran és sis vegades el radi de la circumferència verda.  
 Calculeu la proporció entre el radi de la circumferència verda i la circumferència roja.



Solució:

Siga  $\overline{AT} = r, \overline{BT} = s$

$\overline{AC} = 5r, \overline{BC} = 6r - s, \overline{AB} = r + s$

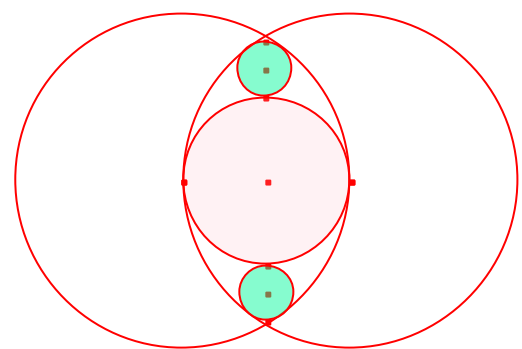
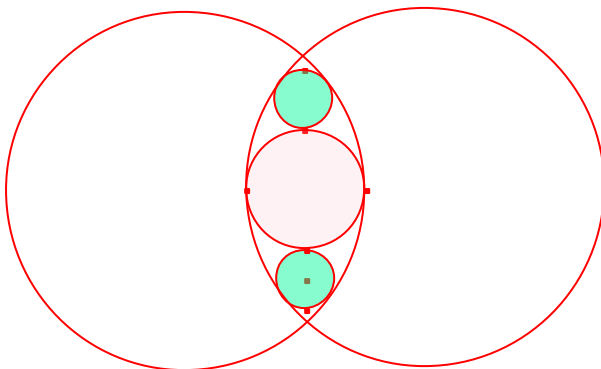
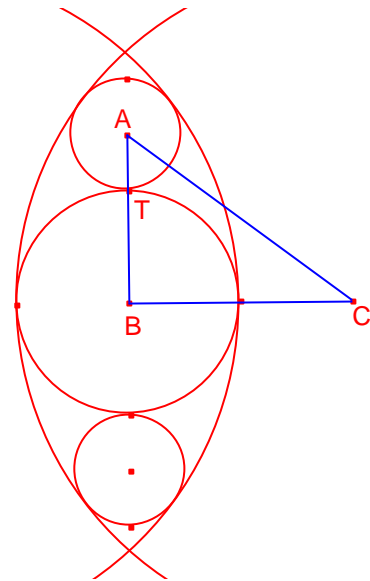
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle  $\triangle ABC$ :

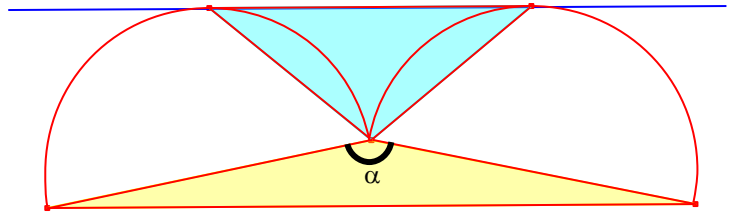
$$25r^5 = (r + s)^2 + (6r - s)^2$$

$$6r^2 - 5rs + s^2 = 0$$

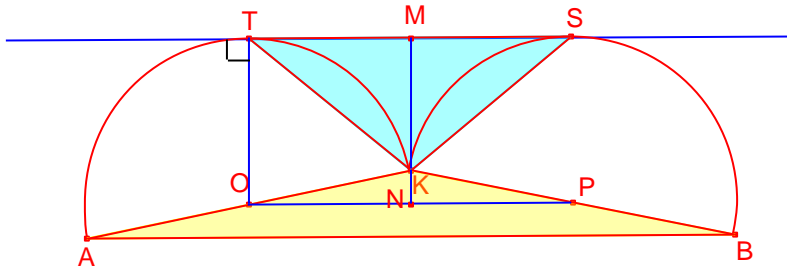
$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$



5037.- La figura està formada per dues semicircumferències iguals. Els diàmetres formen un angle  $\alpha$ , i els triangles ombrejats tenen la mateixa àrea. Calculeu  $\cos \alpha$



Solució:



Siguen les circumferències de centre  $O, P$  i radi  $\overline{OT} = \overline{OK} = \overline{PR} = r$   
 Siga  $\overline{OP} = \overline{TS} = a, \overline{AB} = 2a$   
 Siga  $\alpha = \angle AKB$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle OPK$ :

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{KN} = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \overline{MK} = r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

L'àrea groga és:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} 2a \cdot 2r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

L'àrea Blava és:

$$S_{TSK} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

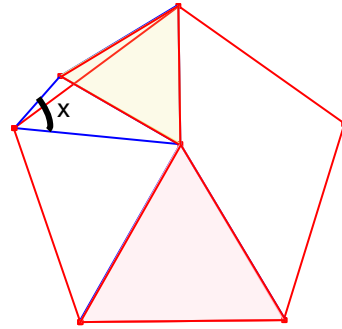
Les dues àrees són iguals:

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \frac{\alpha}{2}$$

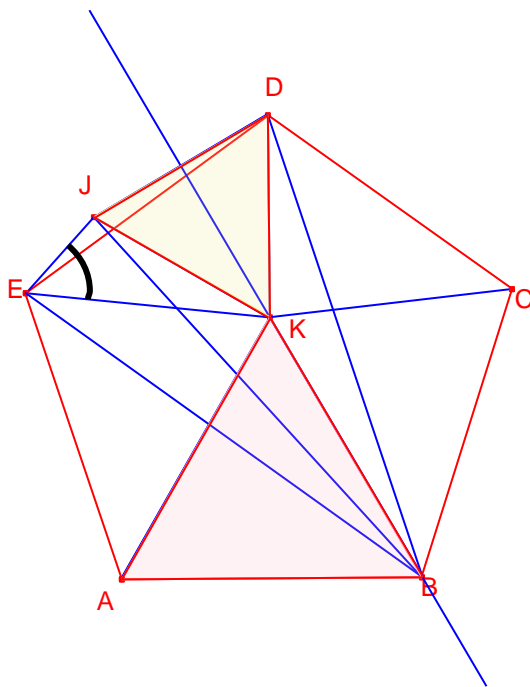
$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{23}{25}$$

5038.- La figura està formada per un pentàgon regular i dos triangles equilàters.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $x$



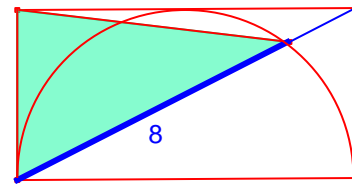
Solució:



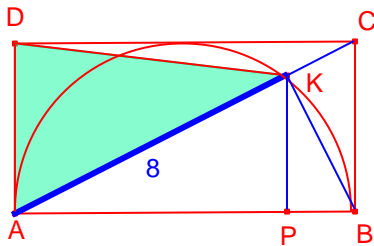
$\text{angle} \text{EAK} = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$   
 $\text{angle} \text{AEK} = \text{angle} \text{AKE} = 66^\circ$   
 $\text{angle} \text{EKJ} = 24^\circ$   
 $\text{angle} \text{DKB} = 150^\circ$   
 $\text{angle} \text{JKB} = 150^\circ$   
 $\text{angle} \text{KDB} = 36^\circ / 2 = 18^\circ$   
 $\text{angle} \text{KBE} = 12^\circ$   
 Els triangles DKB, JKB iguals  
 $\text{BD} = \text{BJ} = \text{BE}$   
 $\text{angle} \text{EBJ} = 12^\circ$   
 $\text{angle} \text{JEB} = 84^\circ$   
 $\text{angle} \text{EKB} = 150^\circ - 24^\circ = 126^\circ$   
 $\text{angle} \text{KEB} = 180^\circ - (126^\circ + 24^\circ) = 30^\circ$   
 $\text{angle} \text{JEK} = 84^\circ - 30^\circ = 54^\circ$



5039.- La figura està fada per un rectangle que conté una semicircumferència. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



$$BP=x, PK=2x, AP=4x$$

$$AB=5x$$

$$CB=(5/2)x$$

Teorema Pitàgores APK

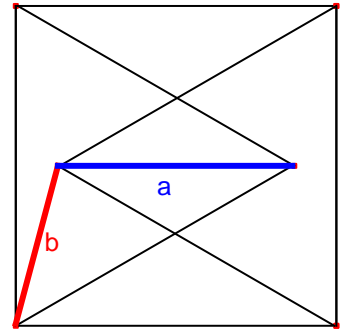
$$20x^2=64$$

$$x^2=16/5$$

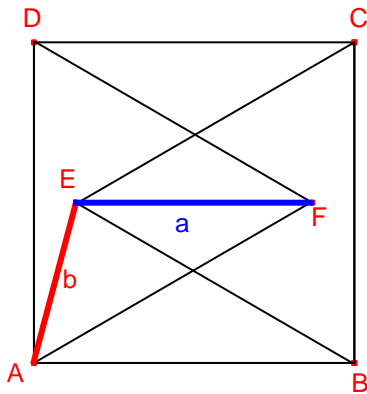
$$[AKD]=(1/2)(5/2)x \cdot 4x=16$$

5040.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters sobre dos costats oposats del quadrat.  
 Calculeu la proporció:

$$\frac{a}{b}$$



Solució:



$$\text{angleEFA}=30^\circ$$

$$\text{angleEAF}=45^\circ$$

Teorema dels sinus al triangle AEF

$$a/b = \sin 45^\circ / \sin 30^\circ = \sqrt{2}$$