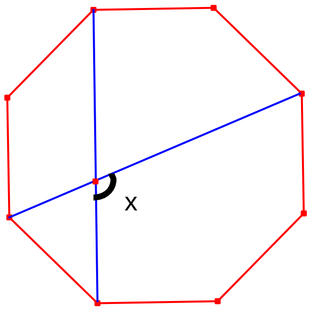
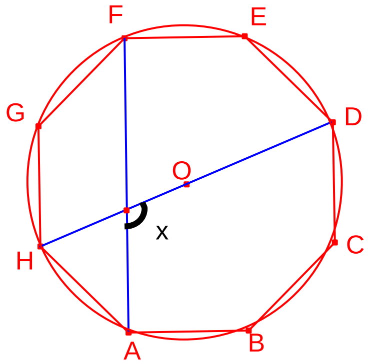
Problemes de Geometria per a l'ESO 505

5041.- En un octògon regular s'han dibuixat dues diagonals.
Calculeu la mesura de l'angle x



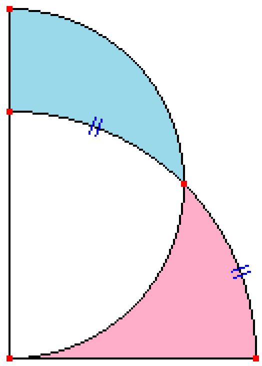
Solució:



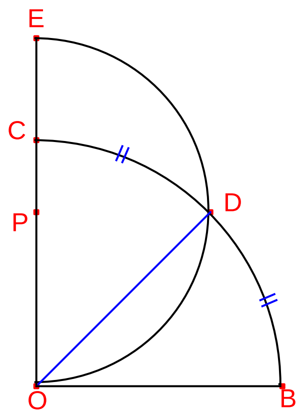
x és un angle interior de la circumferència circumscrita a l'octògon regular:

$$x = \frac{\widehat{HGF} + \widehat{ACD}}{2} = \frac{2 \cdot 45° + 3 \cdot 45°}{2} = \frac{225°}{2} = 112°\,30'$$

5042.- La figura està formada per un quadrant i una semicircumferència. Que passa pel punt mig del quadrant. Proveu que l'àrea ombrejada de blau és igual a l'àrea ombrejada de rosa.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1$
$\angle DOB = \angle\angle COD = 45°$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PE}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OPD}$:

$$\overline{PO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'àrea blava és igual a l'àrea d'un sector de 90º i radi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPD}$ menys l'àrea d'un sector de 45º i radi 1

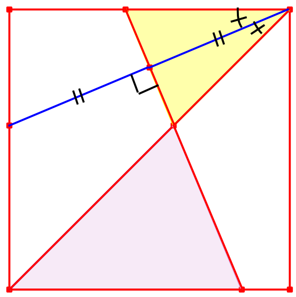
$$S_{blava} \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{8}1^2 = \frac{1}{4}$$

L'àrea blava és igual a l'àrea d'un sector de 45º i radi 1 més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPD}$ menys l'àrea d'un sector de 45º i radi $\frac{\sqrt{2}}{2}$

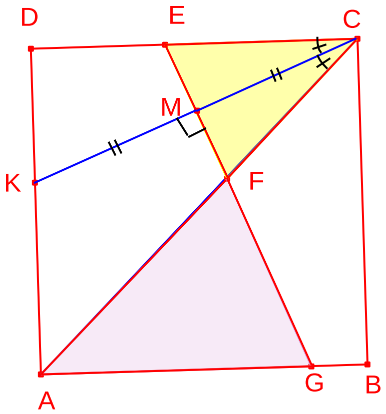
$$S_{blava} \frac{\pi}{8}1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Les dues àrees són iguals.

5043.- La figura està formada per un quadrat dividit per tres segments.
Calculeu la proporció entre l’àrea groga i l’àrea morada



Solució:



CD=1

DK=sqrt(2)-1

CK=sqrt(4-2·sqrt(2))

CE=CF=x, AF=y

Els triangles KDC, EMC semblants

1/(CK/2)=CK/x

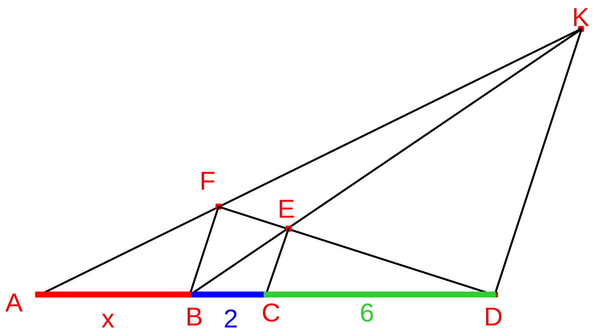
x=2-sqrt(2)

y=AF=sqrt(2)-x=2(sqrt(2)-1)

Els triangles CEF, AGF semblants

[CEF]/[AGF]=(x/y)²=1/2

5044.- En la figura, els segments
$\overline{BF}, \overline{CE}, \overline{DK}$ són paral·lels.
$\overline{BC} = 2, \overline{CD} = 6$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB} = x$



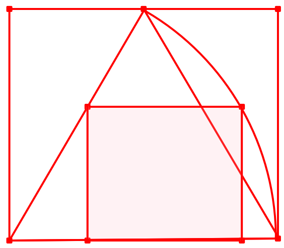
Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{BDF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BF} = 4m, \overline{CE} = 3m$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{BDK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CE} = 3m, \overline{DK} = 4 \cdot 3m = 12m$

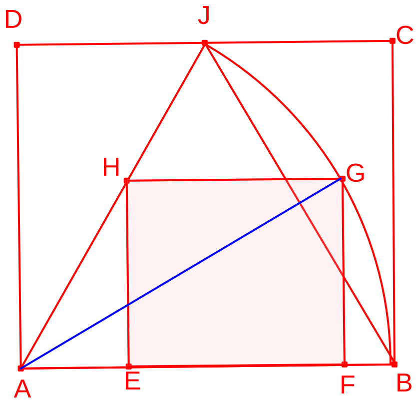
Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{ADK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{8+x}{x} = \frac{12m}{3m} = 4$$
Resolent l'equació:
$x = 4$

5045.- La figura està formada per un triangle equilàter un arc i dos rectangles.
Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del rectangle ombrejat i l'àrea del rectangle exterior.

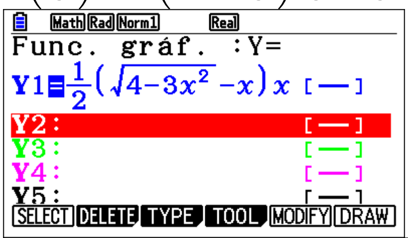


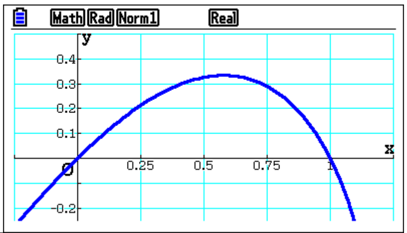
Solució:

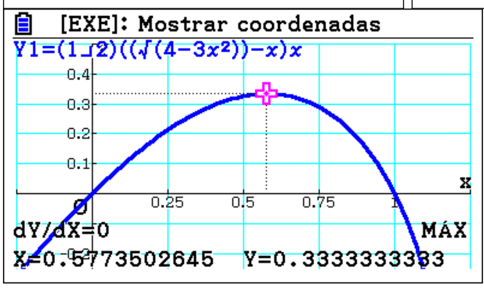
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{BC} = \sqrt{3}$
Siga $\overline{AE} = x, \overline{EH} = x\sqrt{3}$



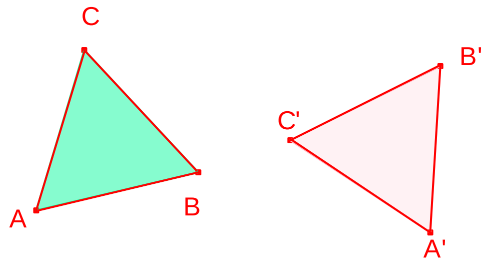
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFG}$:
$\overline{AF} = \sqrt{4 - 3x^2}$
$\overline{EF} = \sqrt{4 - 3x^2} - x$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = \left(\sqrt{4 - 3x^2} - x\right) x\sqrt{3}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és: $S_{ABCD} = 2\sqrt{3}$
La proporció d'àrees és:
$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4 - 3x^2} - x\right) x$
Derivant la funció:
$f'(x) = \frac{2 - 3x^2}{\sqrt{4 - 3x^2}} - x$
$f'(x) = 0$
$2 - 3x^2 = x\sqrt{4 - 3x^2}$
Elevant al quadrat: $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$
$x^2 = \frac{1}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$
El màxim s'assoleix quan:
$x^2 = \frac{1}{3}$
La proporció màxima és:
$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$



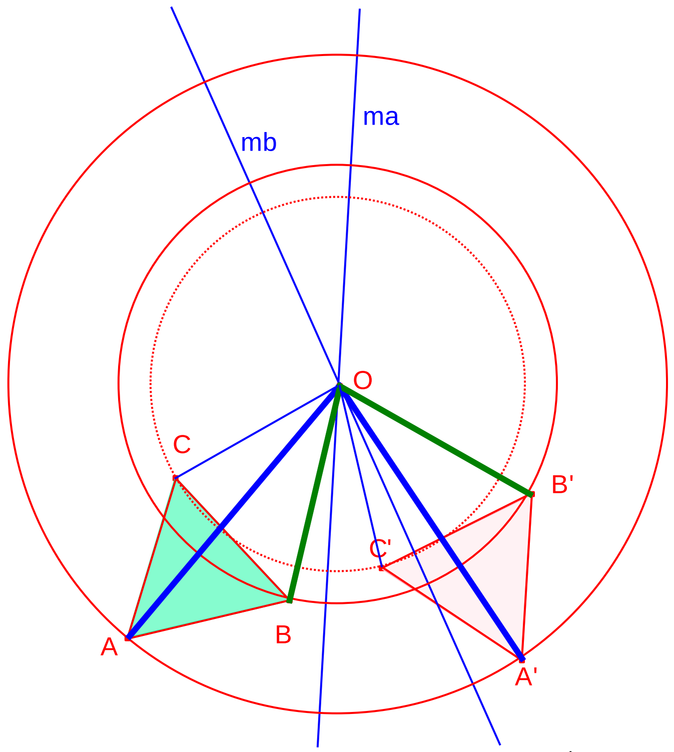




5046.- Quants girs transformen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{A`B`C'}$



Solució:



Siguen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{A'B'C'}$

Siga O la intersecció de la recta mediatriu m_a del segment $\overline{AA'}$ i de la recta mediatriu m_b del segment $\overline{BB'}$

$\overline{OA} = \overline{OA'}, \overline{OB} = \overline{OB'}$

Els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OA'B'}$ són iguals.

Siga $\alpha = \angle AOA' = \angle BOB'$

El gir de centre O i angle α tansforma els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OA'B'}$

Siga $\beta = \angle OAB = \angle OA'B'$

$\angle CAO = \angle C'A'O = 60° - \beta$

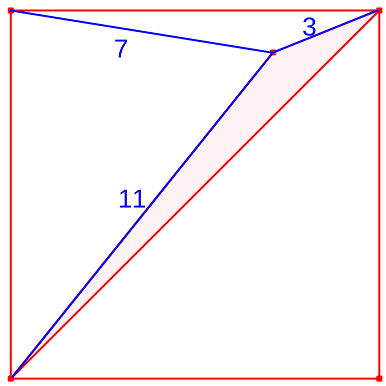
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{OAC}, OA'C'$ són iguals.

$\angle COC' = \alpha$

Per tant el gir de centre O i angle α tansforma els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{A`B`C'}$

En total hi ha $P_6 = 3! = 6$ girs distints que transformen els dos triangles.

5047.- Calculeu l'àrea ombrejada que es troba dins del quadrat de la figura.



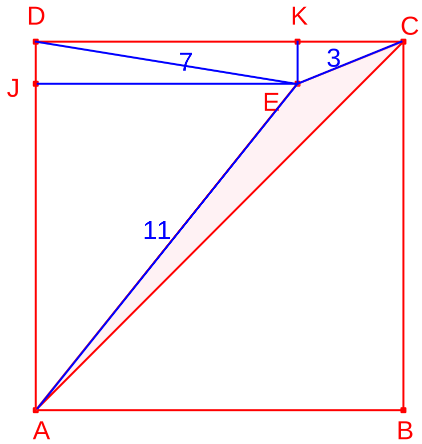
Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen $\overline{AE} = 11, \overline{CE} = 3, \overline{DE} = 7$

Siguen $\overline{JE} = a, \overline{KE} = b$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DKE}, \overset{\Delta}{CKE}, \overset{\Delta}{AJE}$:



$a^2 + b^2 = 49$

$b^2 + (c-a)^2 = 9$

$a^2 + (c-b)^2 = 121$

$$a = \frac{40 + c^2}{2c}, b = \frac{-72 + c^2}{2c}$$

$c^4 - 130c^2 + 3392 = 0$

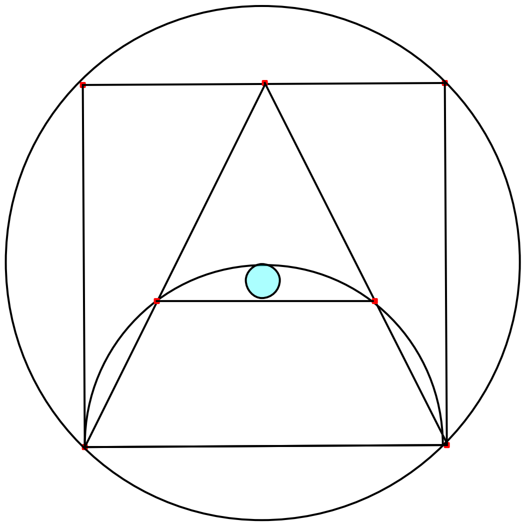
$c^2 = 65 + 7\sqrt{17}$

$2ac + 2bc = -32 + 2c^2$

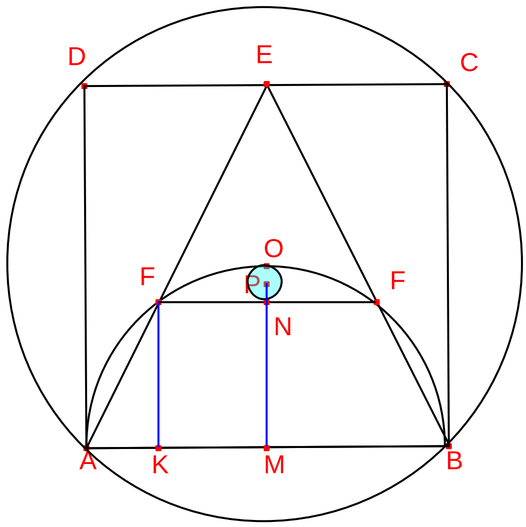
$c^2 - c(a+b) = 16$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}(c^2 - c(a+b)) = 8$$

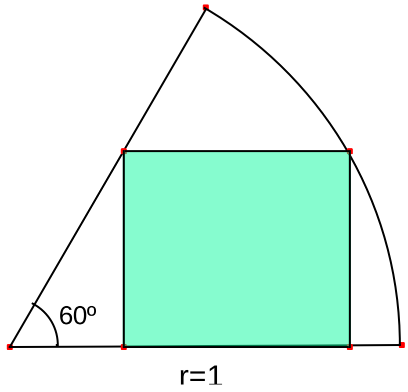
5048.- La figura està formada per un quadrat la seua circumferència circumscrita, una semicircumferència amb diàmetre el costat del quadrat i una circumferència ombrejada. Calculeu la proporció entre l'àrea de la circumferència ombrejada i la circumferència exterior.



Solució:
Siga el quadrat de costat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga la circumferència circumscrita al quadrat $ABCD$ de centre O i rai $\overline{OA} = \sqrt{2}$
Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MA} = \overline{MO} = 1$
Siga la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{ON} = 2s$
Siga K la projecció de F sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{AK} = x, \overline{KF} = 2x$
$\overline{KM} = \overline{FM} = 1 - x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNF}$:
$1 = 4x^2 + (1-x)^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{2}{5}$
$2s = 1 - 2x = \frac{1}{5}$
$s = \frac{1}{10}$
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:
$\frac{S_{ombrejat}}{S_{exterior}} = \left(\frac{s}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{200}$

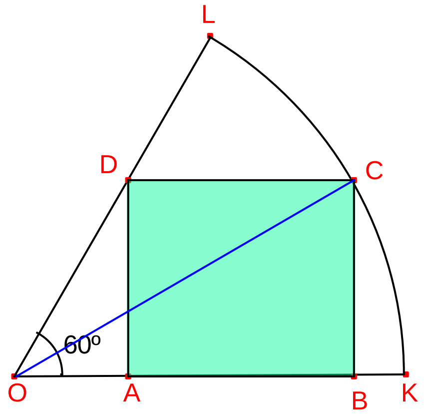


5049.- Un sector circular de 60º i radi $r=1$ té inscrit un rectangle d'àrea màxima.
Calculeu l'àrea màxima de rectangle.

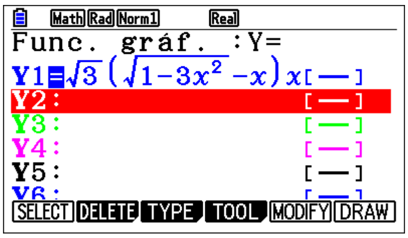


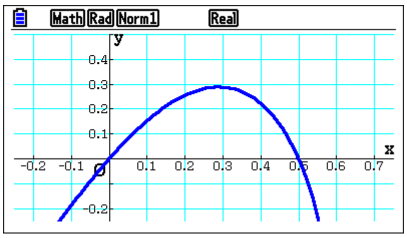
Solució:
Siga el sector circular de centre O, 60º i radi $r=\overline{OK}=1$
Siga $\overline{OA}=x, \overline{AB}=x\sqrt{3}$

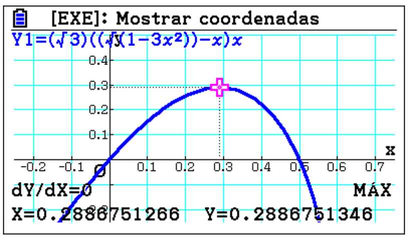
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:



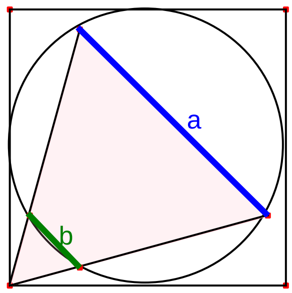
$\overline{OB}=\sqrt{1-3x^2}$
$\overline{AB}=\sqrt{1-3x^2}-x$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{EFGH}=f(x)=\left(\sqrt{1-3x^2}-x\right)x\sqrt{3}$
Derivant la funció:
$$f'(x)=\sqrt{3}\left(\frac{1-6x^2}{\sqrt{1-3x^2}}-2x\right)$$
$f'(x)=0$
$1-6x^2=2x\sqrt{1-3x^2}$
Elevant al quadrat: $48x^4-16x^2+1=0$
$$x^2=\frac{1}{12}, x=\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$f"\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)<0$$
El màxim s'assoleix quan:
$$x^2=\frac{1}{12}$$
La proporció màxima és
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$







5050.- La figura està formada per un quadrat, la circumferència inscrita al quadrat, i un triangle equilàter ombrejat amb dos vèrtexs a la circumferència.
Calculeu la proporció dels segments $a : b$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen $\overline{EF} = a, \overline{GH} = \overline{AH} = b$
$\overline{AF} = \overline{AE} = a, \overline{OM} = \overline{AM} = \overline{OE} = 1, \overline{AO} = \sqrt{2}$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:
$\overline{AH} \cdot \overline{AE} = \overline{AM}^2$
$ab = 1$
$\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$
Elevant al quadrat:
$a^2 - \sqrt{6}a + 1 = 0$
$a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
$b = \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$
La proporció dels segments és:
$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$